ROZWIĄZANIA ZADAŃ EGZAMINACYJNYCH 13.04.2015

1) Układ
$$\begin{cases} 7x+2y+2z=0 \\ 3x+y+4z=0 \\ 6x+2y+az=0 \end{cases}$$
jest układem 3 równań o 3 niewiadomych. Ponieważ wyrazy wolne są równe 0, układ posiada co najmniej 1 rozwiązanie dla dowolnego a: $x=y=z=0$.

Z twierdzenia Cramera: układ n równań liniowych o n niewiadomych posiada 1 rozwiązanie wtedy gdy wyznacznik główny jest różny od 0.

W zadaniu wyznacznik $W=a-8$.

Zatem dla $a\neq 8$ układ ma 1 rozwiązanie $x=y=z=0$.

UWAGA: dla $a=8$ metodą Gaussa otrzymamy $x=6z$, $y=-22z$, $z\in\mathbb{R}$ (nieskończenie wiele rozwiązań)

2)
$$\begin{cases} x-2y+2z-3t=-7 \quad /\cdot 3 \\ -3x+6y+z+2t=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+2z-3t=-7 \\ 7z-7t=-14 \quad /:7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+2z-3t=-7 \\ z-t=-2 \end{cases}$$ stąd $z=t-2$, $t\in\mathbb{R}$

Podstawiamy $z=t-2$ do pierwszego równania

$x-2y-t-4=-7$ stąd np. $x=2y+t-3$, $y\in\mathbb{R}$

Odp.: $x=2y-t-3$, $z=t-2$; $t,y\in\mathbb{R}$

4) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Wyznacz wektory własne

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = \lambda(1-\lambda)(1+\lambda)$$

$\lambda = 0$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda = 1$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\lambda = -1$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

5) $XA = B$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = [1, 2, 3]$

Ponieważ mnożenie macierzy po lewej stronie musi być wykonalne zachodzi $X = [x\ y\ z]$.

$\det A = 0$, zatem A^{-1} nie istnieje

Równanie macierzowe zapisujemy

$$[x, y, z] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = [1\ 2\ 3]$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \\ -3x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

Dodając do siebie te 3 równania otrzymujemy

$$0 = 6$$

Układ nie ma rozwiązań.