

Dla dowolnych liczb rzeczywistych lub zespolonych a, b, c, d takich, że $bd \neq 0$ zachodzą tożsamości

$$\frac{a}{b} = \frac{a+bc}{b}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

ZADANIA Z LICZB ZESPOLONYCH

Oblicz wartości następujących wyrażeń:

- $\frac{10i}{1+3i} + i, \frac{25}{4+3i} + 2 + i, \frac{1-2i}{6-8i} + 3 - 5i, \frac{2+3i}{4-5i} + \frac{4-5i}{2+3i}, \frac{4-3i}{2-i} + \frac{3-2i}{1+2i}$.
- $\frac{i}{z+i} + 2z, \frac{z^2-i}{z+i} - z + 2i, \frac{i+2}{i+1} + 2zi, \frac{i-1}{z} + \frac{z}{-1-i}$.

Odpowiedzi:

- $3 + 2i, 6 - 2i, \frac{161}{50} - \frac{126}{25}i, -\frac{378}{533} - \frac{616}{533}i, 2(1 - i)$.
- $\frac{1}{z+i} (2z^2 + 2iz + i), \frac{iz-2-i}{z+i}, 2iz + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{(i-1)(z^2+2)}{2z}$.

POCHODNE FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

- Oblicz pochodne rzędu pierwszego następujących funkcji i uprość otrzymane wyrażenia.

(a) $(x+4)\sqrt{x^2+2}$ Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} ((x+4)\sqrt{x^2+2})' &= (x+4)' \sqrt{x^2+2} + (x+4) (\sqrt{x^2+2})' = \sqrt{x^2+2} + \\ & \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} (x+4) = 2 \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2}}. \end{aligned}$$

(b) $(x-4)\sqrt{x^2+2}$ Odp.: $2 \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}}$.

(c) $(x+6)\sqrt{x^2+4}$ Odp.: $2(x+2) \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+4}}$.

(d) $(x-6)\sqrt{x^2+4}$ Odp.: $\frac{2(x-1)(x-2)}{\sqrt{x^2+4}}$.

(e) $(x+8)\sqrt{x^2+6}$ Odp.: $\frac{2(x+3)(x+1)}{\sqrt{x^2+6}}$.

(f) $(x-8)\sqrt{x^2+6}$ Odp.: $\frac{2(x-1)(x-3)}{\sqrt{x^2+6}}$.

(g) $(x+8)\sqrt{x^2+8}$ Odp.: $2 \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+8}}$.

(h) $(x-8)\sqrt{x^2+8}$ Odp.: $2 \frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+8}}$.

(i) $(x-a)\sqrt{x^2+b}$ Odp.: $\frac{1}{\sqrt{x^2+b}} (2x^2 - ax + b)$.

- Oblicz pochodne rzędu pierwszego następujących funkcji i uprość otrzymane wyrażenia.

(a) $\frac{(x+4)}{\sqrt{x^2+2}}$ Rozwiązanie:

$$\left(\frac{(x+4)}{\sqrt{x^2+2}}\right)' = \frac{(x+4)'\sqrt{x^2+2} - (x+4)(\sqrt{x^2+2})'}{(\sqrt{x^2+2})^2} = \frac{\sqrt{x^2+2} - (x+4)\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}}{(\sqrt{x^2+2})^2} = \frac{(\sqrt{x^2+2})^2 - x(x+4)}{(\sqrt{x^2+2})^3} = -2\frac{2x-1}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(b) $\frac{(x-4)}{\sqrt{x^2+2}}$ Odp.: $2\frac{2x+1}{(\sqrt{x^2+2})^3}$.

(c) $\frac{(x+4)}{\sqrt{x^2+6}}$ Odp.: $-2\frac{2x-3}{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}$.

(d) $\frac{(x-4)}{\sqrt{x^2+6}}$ Odp.: $\frac{4x+6}{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}$.

(e) $\frac{(x+8)}{\sqrt{x^2+6}}$ Odp.: $-2\frac{4x-3}{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}$.

(f) $\frac{(x-8)}{\sqrt{x^2+8}}$ Odp.: $8\frac{x+1}{(\sqrt{x^2+8})^3}$.

(g) $\frac{(x+8)}{\sqrt{x^2+8}}$ Odp.: $-8\frac{x-1}{(\sqrt{x^2+8})^3}$.

(h) $\frac{(x-8)}{\sqrt{x^2+6}}$ Odp.: $2\frac{4x+3}{(\sqrt{x^2+6})^3}$.

3. Oblicz pochodne rzędu pierwszego podanych funkcji i uprość otrzymane wyrażenia.

(a) $2\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2}}$ Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \left(2\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2}}\right)' &= 2 \left[\frac{[(x+1)^2]'\sqrt{x^2+2} - (x+1)^2[\sqrt{x^2+2}]'}{(\sqrt{x^2+2})^2} \right] = \\ &= 2 \left[\frac{2(x+1)\sqrt{x^2+2} - (x+1)^2\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}}{(\sqrt{x^2+2})^2} \right] = 2 \left[\frac{2(x+1)(\sqrt{x^2+2})^2 - x(x+1)^2}{(\sqrt{x^2+2})^3} \right] = \\ &= \frac{2(x^3+3x+4)}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} = 2(x+1)\frac{-x+x^2+4}{(\sqrt{x^2+2})^3}. \end{aligned}$$

(b) $\frac{2(x+2)(x+1)}{\sqrt{x^2+4}}$ Odp.: $\frac{2(x^3+6x+12)}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}$.

(c) $\frac{2(x+3)(x+1)}{\sqrt{x^2+6}}$ Odp.: $\frac{2(x^3+9x+24)}{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}$.

(d) $2\frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+8}}$ Odp.: $\frac{2(x^3+12x+32)}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}}$.

(e) $\frac{(2x^2-ax+b)}{\sqrt{x^2+b}}$ Odp.: $\frac{(2x^3+3bx-ab)}{(x^2+b)^{\frac{3}{2}}}$.

(f) $2\frac{2x+1}{(\sqrt{x^2+2})^3}$ Odp.: $-\frac{2(4x^2+3x-4)}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$.

(g) $\frac{4x+6}{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}$ Odp.: $-\frac{2(4x^2+9x-12)}{(x^2+6)^{\frac{5}{2}}}$.

$$(h) 8 \frac{x+1}{(\sqrt{x^2+8})^3} \text{ Odp.: } -\frac{8(2x^2+3x-8)}{(x^2+8)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$(i) 2 \frac{4x+3}{(\sqrt{x^2+6})^3} \text{ Odp.: } -\frac{2(8x^2+9x-24)}{(x^2+6)^{\frac{5}{2}}}.$$

4. Oblicz pochodne rzędu pierwszego następujących funkcji i uprość otrzymane wyrażenia. UWAGA: $\arctan x = \operatorname{arctg} x$.

(a) $\arctan \frac{x-3}{7}$ Rozwiązanie:

$$\left(\arctan \frac{x-3}{7}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{7}\right)^2} \left(\frac{x-3}{7}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{7}\right)^2} \left(\frac{1}{7}x - \frac{3}{7}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{7}\right)^2} \frac{1}{7} = \frac{7}{x^2-6x+58}.$$

(b) $\arctan \frac{x-2}{3}$ Odp.: $\frac{3}{x^2-4x+13}$,

(c) $\arctan \frac{2x-3}{4}$ Odp.: $\frac{8}{4x^2-12x+25}$,

(d) $\arctan \frac{3x-1}{\sqrt{5}}$ Odp.: $\frac{\sqrt{5}}{3x^2-2x+2}$,

(e) $\arctan \frac{x+4}{\sqrt{3}}$ Odp.: $\frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{3}(x+4)^2+1}$,

(f) $\arcsin \frac{x-2}{3}$ Odp.: $\frac{1}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$,

(g) $\arcsin \frac{2x-3}{4}$ Odp.: $\frac{2}{\sqrt{-4x^2+12x+7}}$,

(h) $\arcsin \frac{3x-1}{\sqrt{5}}$ Odp.: $\frac{3}{5} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1-\frac{1}{5}(3x-1)^2}}$,

(i) $\arcsin \frac{x+4}{\sqrt{3}}$ Odp.: $\frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1-\frac{1}{3}(x+4)^2}}$.

5. Oblicz pochodne rzędu pierwszego i drugiego następujących funkcji wymiernych i uprość otrzymane wyrażenia. Kolejne działania wykonuj dokładnie tak, jak w przykładzie poniżej.

(a) $\frac{x}{(x-2)^2}$ Rozwiązanie:

i. $\left(\frac{x}{(x-2)^2}\right)' = \frac{x'(x-2)^2 - x[(x-2)^2]'}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)^2 - 2x(x-2)}{(x-2)^4} =$ wyłączamy wspólny czynnik w liczniku $= \frac{(x-2)[(x-2)-2x]}{(x-2)^4} = \frac{(x-2)[-2-x]}{(x-2)^4} =$ upraszczamy $= \frac{-2-x}{(x-2)^3} = -\frac{x+2}{(x-2)^3}.$

ii. $\left(\frac{x}{(x-2)^2}\right)'' = \left(-\frac{x+2}{(x-2)^3}\right)' = -\left(\frac{x+2}{(x-2)^3}\right)' = -\frac{(x-2)^3 - (x+2)[3(x-2)^2]}{(x-2)^6} =$ wyłączamy wspólny czynnik w liczniku $= -\frac{(x-2)^2[(x-2)-3(x+2)]}{(x-2)^6} =$ upraszczamy $= \frac{2(x+4)}{(x-2)^4}.$

(b) $\frac{x+4}{(x+2)^2}$ Odp.: $-\frac{x+6}{(x+2)^3}, \frac{2(x+8)}{(x+2)^4},$

(c) $\frac{x-5}{(x-1)^3}$ Odp.: $-\frac{2(x-7)}{(x-1)^4}, \frac{6(x+9)}{(x-1)^5},$

(d) $\frac{(x-2)^2}{(x+3)^3}$ Odp.: $-\frac{x^2-14x+24}{(x+3)^4}, \frac{2(x^2-24x+69)}{(x+3)^5},$

$$(e) \frac{(x+5)^2}{x-4} \text{ Odp.: } \frac{x^2-8x-65}{(x-4)^2}, \frac{162}{(x-4)^3},$$

$$(f) \frac{(x+5)^2}{(x-4)^2} \text{ Odp.: } -\frac{18(x+5)}{(x-4)^3}, 18\frac{2x+19}{(x-4)^4}.$$