Znajdowanie sumy szeregu*

ZADANIE: Wyznacz przedział zbieżności szeregu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$$

i znajdź jego sumę.

ROZWIĄZANIE 1°

- *Jedna z metod sumowania szeregów potęgowych i do nich podobnych polega na przekształceniu danego szeregu za pomocą różniczkowania lub całkowania w szereg geometryczny i znalezieniu jego sumy. Następnie, całkując otrzymaną sumę (gdy obliczaliśmy sumę szeregu $f'(x)$) lub różniczkując (gdy obliczaliśmy sumę szeregu $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$) , znajdujemu sumę szeregu $f(x)$.*

Aby wyznaczyć przedział zbieżności stosujemy kryterium pierwiastkowe Cauchy'ege.

$$\lim_{n->\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{x^n}\right|} = \lim_{n->\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{|x|^n}} = \lim_{n->\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{|x|} = \frac{1}{|x|}.$$

- *Zwróć uwagę na konieczność użycia pod pierwiastkiem wartości bezwzględnej. Wyjaśnij dlaczego?*

Aby szereg był zbieżny, musi zachodzić nierówność $\frac{1}{|x|} < 1$. Rozwiązując, znajdujemy $x < -1$ lub $x > 1$.

Badamy zbieżność na końcach przedziałów:

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n, \quad f(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n.$$

Drugi z szeregów jest szeregiem przemiennym. Żaden z nich nie spełnia warunku koniecznego zbieżności, gdyż $\lim_{n->\infty} a_n = \lim_{n->\infty} n = \infty$. Zatem dany szereg $f(x)$ jest zbieżny dla $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

*Autor: Stanisław Ewert-Krzemieniewski, 10.05.2015

- $(x^n)' = nx^{n-1}$, *zatem różniczkowanie obniża stopień wykładnika o* 1.
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, *lub* $\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} + C$, *zatem całkowanie powiększa stopień wykładnika o* 1.

Badany szereg można zapisać w postaci

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{x}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{-n} = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{-n-1},$$

czyli

$$\frac{1}{x} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{-n-1}$$

Z postaci ostatniego członu tej równości wynika, że najpierw należy całkować. Dla x oraz ustalonego x_0 należących do jednego z przedziałów $(-\infty, -1)$ lub $(1, \infty)$ mamy

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x} f(x) dx = \int_{x_0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} nx^{-n-1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{x_0}^{x} nx^{-n-1} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{nx^{-n}}{-n} \right|_{x_0}^{x}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left. \frac{x^{-n}}{-1} \right|_{x_0}^{x} = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} x_0^{-n} \right) = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} x_0^{-n} \right).$$

Zatem

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x} f(x) dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n + C.$$

Szereg po prawej stronie jest szeregiem geometrycznym o wyrazie pierwszym $\frac{1}{x}$ i ilorazie $\frac{1}{x}$, zbieżnym, gdy $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$. Zatem przedział zbieżności jest taki sam, jak dla szeregu $f(x)$. Stosując wzór

- $\sum_{n=0}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \frac{a}{1-q}$ *dla* $q \in (-1, 1)$

znajdujemy

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x} f(x) dx = \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} + C = \frac{-1}{x-1} + C,$$

gdzie $C = \sum_{n=1}^{\infty} x_0^{-n}$, x_0 jest ustalone. Różniczkując obustronnie względem x otrzymujemy kolejno

$$\left(\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x} f(x) dx \right)' = \left(\frac{-1}{x-1} + C \right)',$$

$$\frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{(x-1)^2},$$
$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

ODPOWIEDŹ: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \frac{x}{(x-1)^2}$ dla $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

2°

Poprawność powyższego rozwiązania można sprawdzić wykonując następujące przekształcenia:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{x} \frac{-1}{1-\frac{1}{x}}.$$

Ułamek $\frac{-1}{1-\frac{1}{x}}$ traktujemy jako sumę szeregu geometrycznego, o ilorazie $\frac{1}{x}$ i wyrazie początkowym -1, zbieżnego dla x spełniających nierówność$\left|\frac{1}{x}\right| < 1$. Zatem

$$\frac{-1}{x-1} = \frac{1}{x} \frac{-1}{1-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

W ostatnim kroku zmieniliśmy zakres sumowania. Stąd

$$\frac{-1}{x-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n}.$$

Różniczkując względem x dostajemy

$$\left(\frac{-1}{x-1}\right)' = \left(-\sum_{n=1}^{\infty} x^{-n}\right)',$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{-n-1}.$$

Na koniec, mnożąc obustronnie ostatnią równość przez x, otrzymujemy

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{-n}.$$

- *Przedstawione sprawdzenie wyników części pierwszej jest samodzielnym i niezależnym sposobem obliczenia sumy rozważanego szeregu. Trudność polega na "pomyśle". W tym zadaniu "pomysł" to wpadnięcie na to, iż należy rozpocząć zadanie od zastąpienia ułamka przez odpowiednio dobrany szereg geometryczny. Zwróć uwagę na fakt, że ułamek $\frac{1}{1-x}$ można przedstawić jako sumę szeregu geometrycznego na wiele różnych sposobów, np.:*

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2-(x+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n.$$

  Otrzymany szereg jest szeregiem potęgowym o środku w punkcie -1. Rozwiń ułamek $\frac{1}{1-x}$ w szereg o środku w dowolnym punkcie $x_0 \neq 1$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania.

Oblicz sumy nastepujących szeregów:

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$,
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n}$,
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)x^n}{3^n}$,
4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(x^3+1)^n$,
5. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x^3-1)^{n+1}}{n+1}$,
6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1.}$

Odpowiedzi.

1. $\frac{1}{(x-1)^2}$ dla $x \in (-1,1)$.
2. $-ln\,|1-2x|$ dla $x \in< \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$.
3. $\frac{9}{(x+3)^2}$ dla $x \in (-3,3)$.
4. $\frac{1}{x^3}$ dla $x \in (-\sqrt[3]{2}, 0)$.
5. $-\ln\left|2-x^3\right|$ dla $x \in (0, \sqrt[3]{2})$.
6. $-\ln\left|1-\frac{\ln x}{x}\right|$ dla $\frac{\ln x}{x} \in< -1, 1)$.