**ZBIÓR ZADAŃ**

**Z MATEMATYKI**

**dla**

**STUDENTÓW WTMiT**

**Część Pierwsza**

**Małgorzata Firmanty**

**Szczecin , 2015**

1. **Liczby zespolone**

Postać kanoniczna liczby zespolonej

.

 ,  ,  ,

, .

Pierwiastkiem kwadratowym z liczby zespolonej 

nazywamy liczbę zespoloną 

spełniającą równanie  ,

które jest równoważne następującemu układowi równań



**Równanie kwadratowe**









gdzie  jest jednym z dwóch pierwiastków kwadratowych z  .

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Dla 

****

gdzie

 ,  ,  Dla ** ** .

Dla

****

****

****

****

****

****

**Pierwiastki z liczby zespolonej**

Niech  ****

Pierwiastkiem en – tego stopnia z liczby zespolonej

****

nazywamy liczbę zespoloną  spełniającą równanie

 .

Każda liczba zespolona  ma dokładnie

en różnych pierwiastków 

en – tego stopnia , które wyrażają się wzorem



gdzie .

Dla   .

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Dla ****



gdzie .

Wzory Eulera

 ,  .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Dla 

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

Dla każdego  i 











**ZADANIE 1**

Przedstaw w postaci kanonicznej następujące liczby zespolone :

** ,  ,  , .**

**ZADANIE 2**

Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone :

 ,  ,  ,  ,  ,  ,  ,  ,

 ,  ,  ,  ,

 ,  ,  , .

**ZADANIE 3**

Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby zespolone :

 ,  ,  ,

 ,  ,

 ,  , gdzie  .

**ZADANIE 4**

Oblicz :

 ,  ,

 ,  ,  , dla  ,

 ,  .

**ZADANIE 5**

**Przedstaw za pomocą**  i  **funkcje :**

 i  ,  i  .

**ZADANIE 6**

Oblicz pierwiastki kwadratowe z zastępujących liczb zespolonych :

 ,  ,  ,  ,  ,  ,

 ,  .

**ZADANIE 7**

W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż następujące równania :



















**ZADANIE 8**

Zinterpretuj geometrycznie , na płaszczyźnie zespolonej ,

następujące zbiory :

 ,  ,

 ,  ,

 ,  ,

 , .

1. **Macierze i wyznaczniki**

**Macierz kwadratowa**



**Wyznacznik macierzy **



**Minorem** przynależnym do elementu nazywamy wyznacznik, który otrzymamy z wyznacznika  usuwając z niego i-ty wiersz oraz j-tą kolumnę. Minor ten oznaczamy symbolem 



dla dowolnego .



dla dowolnego .

**Własności wyznaczników**

**Własność 1**



wtedy gdy :

- w wyznaczniku  wszystkie elementy pewnego wiersza

(kolumny) - są równe zeru,

- wyznacznik macierzy  ma dwa wiersze (kolumny) identyczne,

- wyznacznik macierzy  ma dwa wiersze (kolumny) proporcjonalne .

**Własność 2**

Mnożąc wyznacznik  przez liczbę  mnożymy przez tę liczbę

wszystkie elementy dowolnie wybranego wiersza (kolumny) .

**Własność 3**

Wyznacznik  nie zmieni swojej wartości jeżeli do dowolnie wybranego wiersza (kolumny) dodamy liniową kombinację pozostałych wierszy

(kolumn) .







**Macierz odwrotna**

**Dopełnieniem algebraicznym** elementu macierzy  nazywamy

liczbę

.

Macierz nieosobliwa  () posiada macierz odwrotną



gdzie macierz dopełnień







gdzie  jest macierzą jednostkową stopnia en .

**Rząd macierzy**

**Rzędem macierzy** prostokątnej



wymiaru  nazywamy :

1. liczbę  równą najwyższemu ze stopni jej różnych od zera minorów, gdy macierz jest niezerowa,
2. liczbę zero, gdy macierz jest zerowa **.**



Rząd macierzy nie ulegnie zmianie, gdy

1. wszystkie elementy, wybranego wiersza ( kolumny), pomnożymy przez liczbę różną od zera,
2. skreślimy wiersz (kolumnę) zerową,
3. skreślimy jeden z dwóch wierszy (kolumn) identycznych lub proporcjonalnych .
4. dodamy do wybranego wiersza (kolumny) liniową kombinację pozostałych wierszy (kolumn) **.**

**ZADANIE 1**

Oblicz następujące wyznaczniki :

** ,  ,  .**

**ZADANIE 2**

Rozwiąż następujące nierówności :

 ,  , 

 ,

 ,

 .

**ZADANIE 3**

Wyznacz macierz  z równania :

** ,**

** ,**

** .**

**ZADANIE 4**

Oblicz rzędy następujących macierz :

** ,**  ,

** .**

1. **Układy równań liniowych**

**Układem m równań liniowych o n** **niewiadomych ** nazywa układ postaci :



w, którym

 są to ustalone liczby rzeczywiste zwane **współczynnikami** przy niewiadomych,



są też ustalonymi liczbami rzeczywistymi zwanymi **wyrazami wolnym**i.

**Macierz główna** układu ****



**Macierz rozszerzona** układu ****



**Twierdzenie 1** (Kroneckera – Capelliego)

Układ **** ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

**rA = rU,**

przy czym gdy

**rA = rU = n** (liczba niewiadomych)

to układ **** ma dokładnie jedno rozwiązanie,

gdy zaś

**rA = rU = k < n**

to układ **** ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od **(n – k)** parametrów **.**

**Wniosek**

Jeżeli

**rA rU**

to układ **** jest sprzeczny tzn. nie ma rozwiązań **.**

Gdy układ  **** ma dokładnie jedno rozwiązanie to nazywamy go układem **oznaczonym** a, gdy nieskończenie wiele rozwiązań, układem **nieoznaczonym**.

Jeżeli w układzie ****

****

to układ **** nazywamy układem **jednorodnym** .

**Układ jednorodny nigdy nie jest sprzeczny !**

Jeżeli układ jednorodny jest oznaczony to jego rozwiązanie ma postać

.

Jedną z metod rozwiązania układu **** jest **metoda eliminacji Gaussa** .

Polega ona na odpowiednim przekształceniu macierzy rozszerzonej **** na

równoważną jej macierz ****, z której można odczytać rozwiązanie

układu **** .

Macierz  ****  przekształcamy wykonując na jej wierszach następujące operacje elementarne :

1. do wybranego wiersza dodajemy liniową kombinację pozostałych wierszy,
2. mnożymy wybrany wiersz przez liczbę różną od zera,
3. wykreślamy wiersze zerowe,
4. wykreślamy jeden z dwóch wierszy jednakowych albo proporcjonalnych.
5. przestawiamy wiersze kolejnością.

Gdy w układzie **** **** , tzn. liczba równań jest taka sama jak liczba

niewiadomych , to układ ten przyjmuje postać :



W tym przypadku macierz główna układu ****



jest macierzą kwadratową.

Jeżeli **** to układ **** nazywamy **układem Cramera**.

**Twierdzenie 2** (Cramera)

Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorami Cramera



gdzie



**ZADANIE 1**

Rozwiąż następujące układy równań metodą eliminacji Gaussa :

** ,  ,**

** ,  ,**

** ,  .**

**ZADANIE 2**

Dla jakich wartości parametru  układ

** , **

**** ,

jest : oznaczony , nieoznaczony , sprzeczny ?

**3. Algebra wektorów**

 - wektor 

 - długość wektora 

 - wektor przeciwny do wektora 

 - wektor zerowy

suma wektorów  i 



mnożenie wektora  przez liczbę 



Wektor



nazywamy liniową kombinacją wektorów



Jeżeli istnieją liczby



nie wszystkie równe zeru ,

takie , że



to wektory



nazywamy **liniowo zależnymi** .

W przeciwnym wypadku mówimy , że wektory



są **liniowo niezależne** .

Dwa liniowo zależne wektory  nazywamy **kolinearnym**i .

Dwa kolinearne niezerowe  wektory nazywamy **równoległymi** .

Wektory równoległe mają ten sam kierunek .

Jeżeli

 i 

to





Trzy liniowo zależne wektory  nazywamy **komplanarnym**i .

**Iloczynem skalarnym** dwóch niezerowych wektorów  i 

nazywamy **liczbę**



gdzie  jest miarą kąta między wektorami  i 

W przypadku, gdy  lub 



**własności iloczynu skalarnego**

**(1)** ,

**(2)**  ,

**(3)** 

dla każdej liczby rzeczywistej  ,

**(4)**  dla każdego wektora 

i  dla ,

**(5)**  dla każdego wektora ,

**(6)** jeżeli  i 

to

.

Miarę  kąta między wektorami  i  obliczamy ze wzoru



**Kosinusy kierunkowe** wektora 

 ,  , 



**Iloczynem wektorowym** pary  wektorów  i 

w przestrzeni zorientowanej nazywamy **wektor zerowy**,

gdy wektory  i  są kolinearne,

w przeciwnym przypadku jest to

**wektor** 

określony następująco :

**1 .** wektor  jest prostopadły do wektora  i do wektora  ,

**2 .**   ,

gdzie  jest miarą kąta między wektorami  i ,

**3 .**  trójka  ma orientację zgodną z orientacją przestrzeni **.**

**własności iloczynu wektorowego**

**(1)** ,

**(2)** 

,

**(3)** 

dla każdej liczby rzeczywistej ,

**(4)** jeżeli  i 

to



 .



gdzie  jest polem równoległoboku zbudowanego na dwóch niezerowych i

nierównoległych wektorach  i 

**A**

**B**

**C**

**Iloczynem mieszanym** trójki  wektorów  ,  i 

w przestrzeni zorientowanej

nazywamy **liczbę**



Jeżeli

 ,  , 

to







gdzie  jest objętością równoległościanu zbudowanego na trzech

niezerowych i niekomplanarnych wektorach

 ,  , 

**A**

**C**

**D**

**B**

**ZADANIE 1**

Zbadaj liniową zależność wektorów :

a .  ,  , 

b .  ,  , 

c .  ,  , 

d .  ,  , 

**ZADANIE 2**

Dane są wektory

a .  ,  ,  , 

b .  ,  ,  ,



c .  ,  , 



przedstaw wektor  jako liniową kombinację wektorów  ,  i .

**ZADANIE 3**

Dane są trzy niekomplanarne wektory  ,  i  . Wykazać , że wektory

 ,  ,  nie są komplanarne .

**ZADANIE 4**

Dane są trzy niekomplanarne wektory  ,  i  . Wykazać , że wektory

 ,  ,  są komplanarne .

**ZADANIE 5**

Dane są wektory  i  .

Znajdź wektor jednostkowy  dzielący na połowę kąt między wektorami

 i  .

**ZADANIE 6**

Wektor  tworzy z osią  kąt o mierze 

a z osią  kąt o mierze  . Ile wynosi miara  kąta

jaki tworzy wektor  z osią  .

**ZADANIE 7**

Znajdź kąty wewnętrzne trójkąta o wierzchołkach  ,

 , 

**ZADANIE 8**

Znajdź rzut wektora  na oś o kierunku wektora  .

**ZADANIE 9**

Dane są trzy punkty  ,  i  . Znajdź rzut wektora  na oś o kierunku wektora

 wiedząc , że punkt  jest środkiem odcinka  .

**ZADANIE 10**

Na wektorach  i  gdzie  ,  i  zbudowano równoległobok .

Oblicz długość wysokości opuszczonej z wierzchołka  na bok  .

**ZADANIE 11**

Dany jest wektor  gdzie  i  są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi. Wyznacz wektor  o długości równej  prostopadły do wektora  i leżący w płaszczyźnie wektorów  i  .

**ZADANIE 12**

Oblicz :



gdzie  ,  i  jest trójką wektorów jednostkowych , wzajemnie prostopadłych , mających orientację zgodną z orientacją przestrzeni .

**ZADANIE 13**

Oblicz pole równoległoboku zbudowanego na wektorach  i  wiedząc , że pole równoległoboku zbudowanego na wektorach  i  jest równe  .

**ZADANIE 14**

Oblicz objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach  ,  i  wiedząc , że objętość równoległościanu zbudowanego na wektorach ,  i  jest równe  .

**ZADANIE 15**

Dany jest czworościan o wierzchołkach  ,  ,  i  . Oblicz jego objętość oraz

długość wysokości opuszczonej z wierzchołka  .

1. **Płaszczyzna**

Równanie płaszczyzny  przechodzącej przez punkt

 i prostopadłej do wektora 

 .

 wektor normalny płaszczyzny 

Równanie ogólne płaszczyzny 

 .

Równanie odcinkowe płaszczyzny 



gdzie .

Równanie płaszczyzny  przechodzącej przez trzy ,

nie leżące na jednej prostej , punkty

 ,  , 



Odległość punktu 

od płaszczyzny 



Warunek równoległości płaszczyzn



i





Odległość między

równoległymi płaszczyznami  i 



 - miara kąta miedzy przecinającymi się płaszczyznami



i





Równanie pęku płaszczyzn



albo



gdzie



i



dwie przecinające się , wzdłuż jednej prostej , płaszczyzny .

**ZADANIE 1**

Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt 

oraz

1. równoległej do płaszczyzny 
2. równoległej do płaszczyzny 
3. równoległej do płaszczyzny 
4. przechodzącej przez oś 
5. przechodzącej przez oś 
6. przechodzącej przez oś **.**

**ZADANIE 2**

Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt 

i prostopadłej do płaszczyzn

oraz **.**

**ZADANIE 3**

Znajdź równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt

 i odcinającej na osiach układu odcinki o jednakowych

długościach **.**

**ZADANIE 4**

Znajdź równanie płaszczyzny równoległej do płaszczyzny

 i oddalonej od niej o **.**

**ZADANIE 5**

Znajdź równanie płaszczyzny odcinającej na osiach układu odcinki proporcjonalne do liczb  ,  ,  i oddalonej od punktu

 o  **.**

**ZADANIE 6**

Znajdź równania płaszczyzn dwusiecznych kątów między płaszczyznami

oraz  **.**

**ZADANIE 7**

Znajdź równania płaszczyzny przechodzącej przez oś  i tworzącej z

płaszczyzną  kąt o mierze równej  **.**

**ZADANIE 8**

Znajdź równania płaszczyzny przechodzącej przez krawędź przecięcia się płaszczyzn

 oraz 

i równoległej do osi  **.**

**ZADANIE 9**

Znajdź równania płaszczyzny przechodzącej przez krawędź przecięcia się płaszczyzn

 oraz 

i prostopadłej do płaszczyzny **.**

**ZADANIE 10**

Znajdź równania płaszczyzny przechodzącej przez krawędź przecięcia się płaszczyzn

 oraz 

i oddalonej o  od początku układu **.**

**ODPOWIEDZI**

**ZAD. 1 - (a)**  **(b)** 

**(c)**  **(d)** 

**(e)**  **(f)**  **.**

**ZAD. 2 -**  **.**

**ZAD. 3 -** ,   ,

 , **.**

**ZAD. 4 -**  ,

 **.**

**ZAD. 5 -**  ,

 **.**

**ZAD. 6 -**  ,

 **.**

**ZAD. 7 -**  ,  **.**

**ZAD. 8 -**  **.**

**ZAD. 9 -**  **.**

**ZAD. 10 -**  ,

 **.**

1. **Prosta**

Równanie kierunkowe prostej  przechodzącej przez punkt

 i równoległej do wektora 

 .

 wektor kierunkowy prostej 

Równanie parametryczne prostej 



Równanie krawędziowe prostej



gdzie



i



dwie przecinające się , wzdłuż prostej  , płaszczyzny .

Jeżeli



to proste

 i 

leżą w jednej płaszczyźnie .

W przeciwnym wypadku proste  i  są skośne .

Odległość między prostymi skośnymi





 - miara kąta miedzy przecinającymi się prostymi

 i 



**ZADANIE 1**

Znajdź równanie kierunkowe i równanie parametryczne prostej

 **.**

**ZADANIE 2**

Oblicz miarę  kąta między prostymi

 i  **.**

**ZADANIE 3**

Znajdź równania dwusiecznych kątów między prostymi

 i  **.**

**ZADANIE 4**

Znajdź rzut punktu 

na prostą  **.**

**ZADANIE 5**

Znajdź punkt  symetryczny do punktu 

względem prostej  **.**

**ZADANIE 6**

Znajdź rzut punktu  na płaszczyznę **.**

**ZADANIE 7**

Znajdź punkt  symetryczny do punktu 

względem płaszczyzny **.**

**ZADANIE 8**

Znajdź odległość  punktu 

od prostej  **.**

**ZADANIE 9**

Pokaż , proste

 i  **.**

są skośne oraz oblicz odległość  między nimi .

**ZADANIE 10**

Znajdź równanie prostej  przechodzącej przez punkt 

przecinającej jednocześnie dwie proste

 i  **.**

**ODPOWIEDZI**

**ZAD. 1 -**  **,** 

**ZAD. 2 -**  **.**

**ZAD. 3 -**  i   **.**

**ZAD. 4 -**  **.**

**ZAD. 5 -**  **.**

**ZAD. 6 -**  **.**

**ZAD. 7 -** **.**

**ZAD. 8 -** **.**

**ZAD. 9 -** **.**

**ZAD. 10 -**  **.**

1. **Prosta i płaszczyzna**

Dane są :

płaszczyzna 

i

prosta 

Jeżeli

 i 

to prosta  nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną  .

Jeżeli



to prosta  ma jeden punkt  wspólnych z płaszczyzną  .

Nazywamy go punktem przebicia płaszczyzny  przez prostą  .

Jeżeli

 i 

to prosta  leży na płaszczyźnie  .

 - miara kąta miedzy prostą  i płaszczyzną 



**ZADANIE 1**

Dla jakiej wartości parametru 

prosta



jest równoległa do płaszczyzny

 **.**

**ZADANIE 2**

Sprawdź czy prosta



leży w płaszczyźnie

 **.**

**ZADANIE 3**

Znajdź rzut prostej



na płaszczyznę

 **.**

**ZADANIE 4**

Znajdź równanie płaszczyzny , w której leżą proste

 i  **.**

**ZADANIE 5**

Znajdź równanie płaszczyzny , w której leżą proste

 i  **.**

**ZADANIE 6**

Znajdź równanie prostej  przechodzącej przez

punkt  ,

równoległej do płaszczyzny 

i przecinającą prostą   **.**

**ZADANIE 7**

Znajdź miarę kąta jaki prosta 

tworzy z płaszczyzną  **.**

**ZADANIE 8**

Przez punkt wspólny płaszczyzny 

i prostej 

poprowadź prostą  leżącą w płaszczyźnie  i prostopadłą do

prostej  **.**

**ZADANIE 9**

Przez punkt  poprowadzono prostą  przecinającą

prostą  pod kątem prostym **.**

Znajdź równanie płaszczyzny  przechodzącej przez prostą 

i początek układu współrzędnych **.**

**ZADANIE 10**

Dana jest prosta  . Znajdź równanie prostej 

leżącej na płaszczyźnie  , równoległą do

płaszczyzny  i przechodzącą przez

punkt  **.**

**ODPOWIEDZI**

**ZAD.1 -**  **.**

**ZAD.2 -**  Tak **.**

**ZAD.3 -**  **.**

**ZAD.4 -**  **.**

**ZAD.5 -**  **.**

**ZAD.6 -**  **.**

**ZAD.7 -**  **.**

**ZAD.8 -**  **.**

**ZAD.9 -**  **.**

**ZAD.10 -**  **.**

1. **Granica ciągu**

**Definicja granicy właściwej ciągu**

**.**

**Wybrane granice**



 gdzie 



Niech

 gdzie 

i

 gdzie 







 jeżeli 

 gdzie 



**Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach właściwych**

Jeżeli istnieją granice właściwe

 i 

to







 gdy  i 

 gdy  **.**

**Symbole nieoznaczone**

**Zadanie 1**

Na podstawie definicji granicy właściwej ciągu udowodnij , że

 ,  , **.**

**Zadanie 2**

Oblicz następujące granice :

1.  ,  ,

 ,  ,  ,

 ,  **.**

1.  ,  ,

 ,  **.**

1.  ,  ,

 ,  **.**

1.  ,  ,

  **.**

1.  ,  ,

 ,   **.**

1. **Granica i ciągłość funkcji**

**Granice specjalne**



Jeżeli  to 

 , 

Jeżeli  to 



Jeżeli  to  **.**

**Granice jednostronne**

 ,  **.**



**Ciągłość funkcji**

Funkcję  nazywamy **ciągłą w punkcie** 

wtedy i tylko wtedy

.

Jeżeli funkcja  jest ciągła to  **.**

**Zadanie 1**

Oblicz następujące granice :

 **,**  **,**  ,

 **,**  **,**  **,**

 **,**  **,**  **,**

 **,**  **,**

 **,** **,** 

 **,**  **,**  **,**  **,**  **,**  **,**

 **,**  **.**

**Zadanie 2**

Zbadaj ciągłość funkcji







1. **Pochodna i różniczka funkcji**

**Definicja pochodnej**



pod warunkiem , że granica po prawej stronie wzoru  istnieje

i jest właściwa .

Równanie stycznej w punkcie  do wykresu funkcji  

gdzie 

**Wzory podstawowe**























**Działania arytmetyczne na pochodnych**









**Pochodna funkcji złożonej**



gdzie 

**Pochodna funkcji odwrotnej**



**Różniczka funkcji**



gdzie 



**Zadanie 1**

Za pomocą definicji pochodnej funkcji  w punkcie 

oblicz pochodną funkcji

1. **** w punkcie ****
2. **** w punkcie ****
3. **** w punkcie ****
4. **** w punkcie ****
5. **** w punkcie ** .**

**Zadanie 2**

Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej

oblicz pochodne funkcji

 **,**  **,**  **.**

**Zadanie 3**

Oblicz i przekształć do najprostszej postaci pochodne funkcji

 **,**  **,**  **,**  **,** **,**  **,**  **,**  **,**

 **,**  **,**

 **,**  **,**

 **,**  **,**  **,**  **,**

 **,**

 **.**

**Zadanie 4**

W jakim punkcie styczna do paraboli  jest równoległa

do siecznej poprowadzonej przez punkty o odciętych **i** **.**

**Zadanie 5**

Za pomocą różniczki oblicz przybliżoną wartość wyrażenia

 **,**  **,**  **,**  **.**

**Zadanie 6**

Sprawdź , że funkcja

spełnia równanie

spełnia równanie

spełnia równanie

spełnia równanie**.**

**10. Zastosowania pochodnej**

**Twierdzenie de L’Hospitala**

Jeżeli :

1. dziedziny funkcji  i  zawierają

pewne sąsiedztwo  punktu ,

(2) 

albo

 ,

(3) istnieje granica  (właściwa albo niewłaściwa) ,

to

 **.**

**Asymptoty wykresu funkcji**

Zapis  oznacza, że

albo  , albo 

Prosta 

jest asymptotą pionową lewostronną { prawostronną }

krzywej ,

jeżeli

  **.**

Niech dziedzina funkcji zawiera pewien przedział  .

Prostą 

jest asymptotą poziomą lewostronną {prawostronną}

krzywej ,

jeżeli

  **.**

Prosta 

jest asymptotą ukośną lewostronną {prawostronną}

krzywej  ,

jeżeli

istnieją granice właściwe

 i 

 i  **.**

**Wzór Taylora**



**Wzór Maclaurina**



**Wzór przybliżony**





**Błąd bezwzględny** 

Jeżeli  dla , to

,

gdzie  oznacza **błąd maksymalny**.

**Ekstrema i monotoniczność funkcji**

Jeżeli dla każdego

  

to

funkcja jest rosnąca { malejąca } w przedziale 

**Twierdzenie (Fermata)**

Jeżeli funkcja  ma w punkcie  ekstremum i ma w tym punkcie pochodną  to

**.**

**Wniosek**

Funkcja  może mieć ekstremum tylko w takim punkcie , w którym albo , albo  nie istnieje **.**

**Twierdzenie (Pierwszy warunek wystarczający ekstremum)**

Jeżeli funkcja jest ciągła w punkcie , a ponadto posiada pochodną  na pewnym sąsiedztwie  punktu , przy czym

 ,

to funkcja  ma w punkcie  maksimum lokalne.

Jeżeli zamiast warunku  spełniony jest warunek

 ,

to funkcja  ma w punkcie  minimum lokalne **.**

**Twierdzenie (Drugi warunek wystarczający ekstremum)**

Jeżeli funkcja  ma pochodne  i 

na pewnym otoczeniu  punktu  , pochodna  jest ciągła w punkcie ,

 i  to funkcja  ma w punkcie  maksimum lokalne, gdy  oraz minimum lokalne, gdy  **.**

**Wypukłość i punkty przegięcia krzywej**

Jeżeli dla każdego

  

to krzywa 

jest wypukła w dół { wypukła w górę } w przedziale 

**Twierdzenie**

Jeżeli funkcja  ma pochodną  , która jest ciągła na pewnym otoczeniu  punktu  , 

oraz spełniony jest albo warunek



albo warunek

 ,

to punkt  jest punktem przegięcia krzywej  **.**

**ZADANIE 1**

Zbadaj ekstrema funkcji za pomocą pochodnej pierwszego rzędu

 ,  ,  ,  **.**

**ZADANIE 2**

Zbadaj ekstrema funkcji za pomocą pochodnej drugiego rzędu

 ; ,

 ;  ,  ,

 ;  **.**

**ZADANIE 3**

Zbadaj ekstrema i monotoniczność funkcji

 ,  ,  ,  ,  ,  ,  ;  **.**

**ZADANIE 4**

Napisz wzór Maclaurina dla funkcji

1.  i . Korzystając z tego wzoru oblicz przybliżoną wartość liczby  oraz oszacuj błąd tego przybliżenia.
2.  i . Korzystając z tego wzoru oblicz przybliżoną wartość liczby  oraz oszacuj błąd tego przybliżenia.
3.  i . Korzystając z tego wzoru oblicz przybliżoną wartość liczby  oraz oszacuj błąd tego przybliżenia.

**ZADANIE 5**

Zbadaj wypukłość oraz punkty przegięcia krzywej

 ,  **,**  ,

 , ,

 , **.**

**ZADANIE 6**

Za pomocą reguły de L’ Hospitala oblicz granice

 ,  , ,

 , , **,**  ,

 , **,**  ,  , **,**  ,

 , , ,

 , **,**  ,

 , , ,

 , , ,  **.**

**ZADANIE 7**

Wyznacz asymptoty krzywych

 ,  ,  ,

 ,   **,**  ,

 ,  , **.**

**11. Badanie funkcji**

**Schemat badania funkcji**

1. Dziedzina funkcja, miejsca zerowe, parzystość, nieparzystość funkcji.
2. Granice funkcji na końcach przedziałów określoności, asymptoty wykresu funkcji.
3. Pierwsza pochodna funkcji jej dziedzina i miejsca zerowe.
4. Druga pochodna funkcji jej dziedzina i miejsca zerowe.
5. Tabelka przebiegu zmienności funkcji.
6. Wykres funkcji.

**Zadanie**

Zbadaj przebieg zmienności i narysuj wykres funkcji :

 **.**

Ad. 1

dziedzina funkcji



miejsce zerowe



parzystość , nieparzystość



Wniosek :

badana funkcja jest nieparzysta, zatem jej wykres symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Ad.2













wnioski :

asymptota pionowa obustronna - 

asymptota pozioma - brak

asymptota ukośna obustronna - 

Ad.3







Ad.4







Ad.5

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **…** |  | **…** |  | **…** |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

Ad.6

X

Y

 **ZADANIE 1**

Zbadaj przebieg zmienności oraz sporządź wykresy funkcji

 **,**  **,**   **,**   **,**  **,**  **,**

 **,**  **,**    **,**  **,**

 **,**   **,**   **,**  **.**

**Bibliografia**

B. Gdowski , E. Pluciński , Zbiór zadań z rachunku wektorowego

i geometrii analitycznej , Wyd. 2 , Warszawa , OWPW , 2006 ,

ISBN 83-7207-209-4 .

W. Krysicki , L. Włodarski , Analiza matematyczna w zadaniach 1 ,

Wyd. 29 , Warszawa , PWN , 2015 ,

ISBN 978-83-01-14295-7 .

W. Krysicki , L. Włodarski , Analiza matematyczna w zadaniach 2 ,

Wyd. 27 , Warszawa , PWN , 2015 ,

ISBN 978-83-01-142956-4 .

W. Stankiewicz , Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych Część A i B , Wyd. 12 , Warszawa , PWN , 2015 ,

ISBN 978-83-01-142945-1 .

G. N. Berman , Zbiór zadań z analizy matematycznej , przeł. G. Zawadzki . Gliwice , Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego ,

1999 ,

ISBN 83-86644-25-7

