3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3\ln n} = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\ln n} = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{\ln n}$

Ponownie uporać piszeli (wnyscy)

$(-2)^n = (-1)^n \cdot 2$

2^n rośnie szybko. Można podejrzewać, że $\frac{2^n}{\ln n} \not\to 0$.

Najprościej

$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{\ln x} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(2^x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln 2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x 2^x \ln 2 =$

$= \infty$ — nie spełnia war. koniecznego.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} \qquad a_{n+1} = \frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3} \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cdot(3n)! \; (n!)^3}{(n!)^3 (n+1)^3 \cdot (3n)!} =$

$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \longrightarrow \frac{3\cdot 3\cdot 3}{1^3} = 27$

5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-2\sqrt{n}}$. Porównujemy z $\sum \frac{1}{n}$ który jest rozbieżny

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n-2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{n-2\sqrt{n}} = \lim \frac{1}{1-2\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim \frac{1}{1-\frac{2}{\sqrt{n}}} = 1$

Zatem badany szereg jest rozbieżny

<u>Przypomnienie</u> Jeśli $\sum a_n$ i $\sum b_n$ są takie, że

$0 < a_n \le b_n$ to

zbieżny $\Leftarrow$ zbieżny

rozbieżny $\Rightarrow$ rozbieżny.

1) Oblicz sumę szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$

Nikt nie zauważył, że dla $n=1$ mamy $\frac{1}{0}$.

Należy rozpisać sumę częściową biorąc większą liczbę wyrazów:

$$S_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\dots\right.$$

$$\left.\dots+\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n-2}\right)+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{4}$$

2) Dla jakich $x \in R$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^x}{3}\right)^n$ jest zbieżny?

Jest to szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{e^x}{3}$, zbieżny dla $-1 < q < 1 \iff -1 < \frac{e^x}{3} < 1$.

Nierówność $-1 < \frac{e^x}{3}$ jest zawsze prawdziwa, bo $e^x > 0$.

Zostaje: $\frac{e^x}{3} < 1 \iff e^x < 3 \iff \ln e^x < \ln 3$

$$\iff x < \ln 3 \iff x \in (-\infty, \ln 3).$$

Uwaga: $-3 < e^x < 3$ to ma sens, ale

$\ln(-3) < \ln e^x$ nie, bo $\ln x$ istn. dla $x > 0$

$-\ln 3 < \ln e^x = x$ też nie!

$3^{-1} < e^x \iff \ln 3^{-1} = -\ln 3 < x$ – dobrze.