

MATEMATYKA
IV etap edukacyjny

Cele kształcenia – wymagania ogólne

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	
Uczeń interpretuje tekst matematyczny. Po rozwiązaniu zadania interpretuje otrzymany wynik.	Uczeń używa języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	
Uczeń używa prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych.	Uczeń rozumie i interpretuje pojęcia matematyczne oraz operuje obiektami matematycznymi.
III. Modelowanie matematyczne.	
Uczeń dobiera model matematyczny do prostej sytuacji i krytycznie ocenia trafność modelu.	Uczeń buduje model matematyczny danej sytuacji, uwzględniając ograniczenia i zastrzeżenia.
IV. Użycie i tworzenie strategii.	
Uczeń stosuje strategię, która jasno wynika z treści zadania.	Uczeń tworzy strategię rozwiązania problemu.
V. Rozumowanie i argumentacja.	
Uczeń prowadzi proste rozumowanie, składające się z niewielkiej liczby kroków.	Uczeń tworzy łańcuch argumentów i uzasadnia jego poprawność.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
1. Liczby rzeczywiste. Uczeń:	
<p>1) przedstawia liczby rzeczywiste w różnych postaciach (np. ułamka zwykłego, ułamka dziesiętnego okresowego, z użyciem symboli pierwiastków, potęg);</p> <p>2) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych (wymiernych);</p> <p>3) posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach;</p> <p>4) oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych;</p> <p>5) wykorzystuje podstawowe własności potęg (również w zagadnieniach związanych z innymi dziedzinami wiedzy, np. fizyką, chemią, informatyką);</p> <p>6) wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym;</p> <p>7) oblicza błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia;</p> <p>8) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;</p> <p>9) wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (również złożonych na procent składany i na okres krótszy niż rok).</p>	<p>spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</p> <p>1) wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną, zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu: $x - a = b$, $x - a < b$, $x - a \geq b$.</p> <p>2) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.</p>
2. Wyrażenia algebraiczne. Uczeń:	
<p>1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$.</p>	<p>spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</p> <p>1) używa wzorów skróconego mnożenia na $(a \pm b)^3$ oraz $a^3 \pm b^3$;</p> <p>2) dzieli wielomiany przez dwumian $ax + b$;</p> <p>3) rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias;</p> <p>4) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany;</p> <p>5) wyznacza dziedzinę prostego wyrażenia wymiernego z jedną zmienną, w którym w mianowniku występują tylko wyrażenia</p>

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
	dające się łatwo sprowadzić do iloczynu wielomianów liniowych i kwadratowych; 6) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; rozszerza i (w łatwych przykładach) skraca wyrażenia wymierne.
3. Równania i nierówności. Uczeń:	
1) sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności; 2) wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi; 3) rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą; 4) rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą; 5) rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą; 6) korzysta z definicji pierwiastka do rozwiązywania równań typu $x^3 = -8$; 7) korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x - 7) = 0$; 8) rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x + 1}{x + 3} = 2, \frac{x + 1}{x} = 2x$.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) stosuje wzory Viète’a; 2) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem; 3) rozwiązuje układy równań, prowadzące do równań kwadratowych; 4) stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$; 5) stosuje twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych; 6) rozwiązuje równania wielomianowe dające się łatwo sprowadzić do równań kwadratowych; 7) rozwiązuje łatwe nierówności wielomianowe; 8) rozwiązuje proste nierówności wymierne typu: $\frac{x + 1}{x + 3} > 2, \frac{x + 3}{x^2 - 16} < \frac{2x}{x^2 - 4}$, $\frac{3x - 2}{4x - 7} \leq \frac{1 - 3x}{5 - 4x}$; 9) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o poziomie trudności nie wyższym niż: $ x + 1 - 2 = 3, x + 3 + x - 5 > 12$.
4. Funkcje. Uczeń:	
1) określa funkcje za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego; 2) oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznаныmi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość; 3) odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja maleje, rośnie, ma stały znak);	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x) , y = c \cdot f(x), y = f(cx)$; 2) szkicuje wykresy funkcji logarytmicznych dla różnych podstaw; 3) posługuje się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
<p>punkty, w których funkcja przyjmuje w podanym przedziale wartość największą lub najmniejszą);</p> <p>4) na podstawie wykresu funkcji $y = f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y = f(x + a)$, $y = f(x) + a$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$;</p> <p>5) rysuje wykres funkcji liniowej, korzystając z jej wzoru;</p> <p>6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie;</p> <p>7) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;</p> <p>8) szkicuje wykres funkcji kwadratowej, korzystając z jej wzoru;</p> <p>9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;</p> <p>10) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje);</p> <p>11) wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;</p> <p>12) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym);</p> <p>13) szkicuje wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ dla danego a, korzysta ze wzoru i wykresu tej funkcji do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi;</p> <p>14) szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;</p> <p>15) posługuje się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.</p>	<p>4) szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu.</p>

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
5. Ciągi. Uczeń:	
1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym; 2) bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny; 3) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego; 4) stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem rekurencyjnym; 2) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$ oraz z twierdzeń o działaniach na granicach ciągów; 3) rozpoznaje szeregi geometryczne zbieżne i oblicza ich sumy.
6. Trygonometria. Uczeń:	
1) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° ; 2) korzysta z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora); 3) oblicza miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną); 4) stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2 + \cos^2 = 1$, $\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$ oraz $\sin(90^\circ -) = \cos$; 5) znając wartość jednej z funkcji: sinus lub cosinus, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego.	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie; 2) wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens dowolnego kąta o mierze wyrażonej w stopniach lub radianach (przez sprowadzenie do przypadku kąta ostrego); 3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych; 4) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych (np. gdy rozwiązuje nierówności typu $\sin x > a$, $\cos x \leq a$, $\operatorname{tg} x > a$); 5) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; 6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$, $\cos 2x < \frac{1}{2}$.
7. Planimetria. Uczeń:	
1) stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym; 2) korzysta z własności stycznej do okręgu i własności okręgów stycznych; 3) rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów;	spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto: 1) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu;

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
<p>4) korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi.</p>	<p>2) stosuje twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do obliczania długości odcinków i ustalania równoległości prostych;</p> <p>3) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych w jednokładności (odcinka, trójkąta, czworokąta itp.);</p> <p>4) rozpoznaje figury podobne i jednokładne; wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) ich własności;</p> <p>5) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.</p>
<p>8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Uczeń:</p>	
<p>1) wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);</p> <p>2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;</p> <p>3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;</p> <p>4) oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;</p> <p>5) wyznacza współrzędne środka odcinka;</p> <p>6) oblicza odległość dwóch punktów;</p> <p>7) znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.</p>	<p>spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</p> <p>1) interpretuje graficznie nierówność liniową z dwiema niewiadomymi oraz układy takich nierówności;</p> <p>2) bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań ogólnych;</p> <p>3) wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci ogólnej i przechodzi przez dany punkt;</p> <p>4) oblicza odległość punktu od prostej;</p> <p>5) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności;</p> <p>6) wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu;</p> <p>7) oblicza współrzędne oraz długość wektora; dodaje i odejmuje wektory oraz mnoży je przez liczbę. Interpretuje geometrycznie działania na wektorach;</p> <p>8) stosuje wektory do opisu przesunięcia wykresu funkcji.</p>
<p>9. Stereometria. Uczeń:</p>	
<p>1) rozpoznaje w graniastoslupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi itp.), oblicza miary tych kątów;</p>	<p>spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</p> <p>1) określa, jaką figurą jest dany przekrój sfery płaszczyzną;</p> <p>2) określa, jaką figurą jest dany przekrój graniastostłupa lub ostrosłupa płaszczyzną.</p>

ZAKRES PODSTAWOWY	ZAKRES ROZSZERZONY
<p>2) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów;</p> <p>3) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;</p> <p>4) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami;</p> <p>5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;</p> <p>6) stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości.</p>	
<p>10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Uczeń:</p>	
<p>1) oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje te parametry dla danych empirycznych;</p> <p>2) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania;</p> <p>3) oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.</p>	<p>spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:</p> <p>1) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych;</p> <p>2) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe;</p> <p>3) korzysta z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.</p>
<p>11. Rachunek różniczkowy. Uczeń:</p>	
	<p>1) oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych;</p> <p>2) oblicza pochodne funkcji wymiernych;</p> <p>3) korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej;</p> <p>4) korzysta z własności pochodnej do wyznaczenia przedziałów monotoniczności funkcji;</p> <p>5) znajduje ekstrema funkcji wielomianowych i wymiernych;</p> <p>6) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.</p>

ZALECANE WARUNKI I SPOSÓB REALIZACJI

Uwzględniając zróżnicowane potrzeby edukacyjne uczniów, szkoła organizuje zajęcia zwiększające szanse edukacyjne dla uczniów mających trudności w nauce matematyki oraz dla uczniów, którzy mają szczególne zdolności matematyczne.

W przypadku uczniów zdolnych, można wymagać większego zakresu umiejętności, jednakże wskazane jest podwyższanie stopnia trudności zadań, a nie poszerzanie tematyki.