

Dla dowolnych liczb rzeczywistych lub zespolonych a, b, c, d takich, że $bd \neq 0$ zachodzą tożsamości

$$\frac{a}{b} = \frac{a+bc}{b}, \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

ZADANIA Z LICZB ZESPOLONYCH

Oblicz wartości następujących wyrażeń:

- $\frac{10i}{1+3i} + i, \frac{25}{4+3i} + 2 + i, \frac{1-2i}{6-8i} + 3 - 5i, \frac{2+3i}{4-5i} + \frac{4-5i}{2+3i}, \frac{4-3i}{2-i} + \frac{3-2i}{1+2i}.$
- $\frac{i}{z+i} + 2z, \frac{z^2-i}{z+i} - z + 2i, \frac{i+2}{i+1} + 2zi, \frac{i-1}{z} + \frac{z}{-1-i}.$

Odpowiedzi:

- $3 + 2i, 6 - 2i, \frac{161}{50} - \frac{126}{25}i, -\frac{378}{533} - \frac{616}{533}i, 2(1 - i).$
- $\frac{1}{z+i} (2z^2 + 2iz + i), \frac{iz-2-i}{z+i}, 2iz + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{(i-1)(z^2+2)}{2z}.$

POCHODNE FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Oblicz pochodne rzędu pierwszego następujących funkcji i uprość otrzymane wyrażenia.

- $(x+4)\sqrt{x^2+2}$ Solution: $\sqrt{x^2+2} + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}(x+4) = 2\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2}}.$
- $(x-4)\sqrt{x^2+2}$ Solution: $2\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2+2}}.$
- $(x+6)\sqrt{x^2+4}$ Solution: $2(x+2)\frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+4}}.$
- $(x-6)\sqrt{x^2+4}$ Solution: $\frac{2(x-1)(x-2)}{\sqrt{x^2+4}}.$
- $(x+8)\sqrt{x^2+6}$ Solution: $\frac{2(x+3)(x+1)}{\sqrt{x^2+6}}.$
- $(x-8)\sqrt{x^2+6}$ Solution: $\frac{2(x-1)(x-3)}{\sqrt{x^2+6}}.$
- $(x+8)\sqrt{x^2+8}$ Solution: $2\frac{(x+2)^2}{\sqrt{x^2+8}}.$
- $(x-8)\sqrt{x^2+8}$ Solution: $2\frac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2+8}}.$
- $(x-a)\sqrt{x^2+b}$ Solution: $\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}(2x^2 - ax + b).$
- $\frac{(x+4)}{\sqrt{x^2+2}}$ Solution: $\frac{\sqrt{x^2+2} - (x+4)\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}}{(\sqrt{x^2+2})^2} = \frac{(\sqrt{x^2+2})^2 - x(x+4)}{(\sqrt{x^2+2})^3} = -2\frac{2x-1}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}.$
- $\frac{(x-4)}{\sqrt{x^2+2}}$ Solution: $2\frac{2x+1}{(\sqrt{x^2+2})^3}.$

$$12. \frac{(x+4)}{\sqrt{x^2+6}} \text{ Solution: } -2 \frac{2x-3}{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$13. \frac{(x-4)}{\sqrt{x^2+6}} \text{ Solution: } \frac{4x+6}{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$14. \frac{(x+8)}{\sqrt{x^2+6}} \text{ Solution: } -2 \frac{4x-3}{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$15. \frac{(x-8)}{\sqrt{x^2+8}} \text{ Solution: } 8 \frac{x+1}{(\sqrt{x^2+8})^3}.$$

$$16. \frac{(x+8)}{\sqrt{x^2+8}} \text{ Solution: } -8 \frac{x-1}{(\sqrt{x^2+8})^3}.$$

$$17. \frac{(x-8)}{\sqrt{x^2+6}} \text{ Solution: } 2 \frac{4x+3}{(\sqrt{x^2+6})^3}.$$

Oblicz pochodne rzędu drugiego funkcji z zadań o numerach nieparzystych.

$$18. \frac{2(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2}} \text{ Solution: } 2 \left[\frac{2(x+1)\sqrt{x^2+2} - (x+1)^2 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{(\sqrt{x^2+2})^2} \right] =$$

$$2 \left[\frac{2(x+1)(\sqrt{x^2+2})^2 - x(x+1)^2}{(\sqrt{x^2+2})^2} \right] = \frac{2(x^3+3x+4)}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} = 2(x+1) \frac{-x+x^2+4}{(\sqrt{x^2+2})^3}.$$

$$19. \frac{2(x+2)(x+1)}{\sqrt{x^2+4}} \text{ Solution: } \frac{2(x^3+6x+12)}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$20. \frac{2(x+3)(x+1)}{\sqrt{x^2+6}} \text{ Solution: } \frac{2(x^3+9x+24)}{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$21. \frac{2(x+2)^2}{\sqrt{x^2+8}} \text{ Solution: } \frac{2(x^3+12x+32)}{(x^2+8)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$22. \frac{(2x^2-ax+b)}{\sqrt{x^2+b}} \text{ Solution: } \frac{(2x^3+3bx-ab)}{(x^2+b)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$23. 2 \frac{2x+1}{(\sqrt{x^2+2})^3} \text{ Solution: } -\frac{2(4x^2+3x-4)}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$24. \frac{4x+6}{(x^2+6)^{\frac{3}{2}}} \text{ Solution: } -\frac{2(4x^2+9x-12)}{(x^2+6)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$25. 8 \frac{x+1}{(\sqrt{x^2+8})^3} \text{ Solution: } -\frac{8(2x^2+3x-8)}{(x^2+8)^{\frac{5}{2}}}.$$

$$26. 2 \frac{4x+3}{(\sqrt{x^2+6})^3} \text{ Solution: } -\frac{2(8x^2+9x-24)}{(x^2+6)^{\frac{5}{2}}}.$$