

# Pytania i zagadnienia do egzaminów i zaliczeń z matematyki

## EL, S1, I semestr 2015/16

Na egzaminy i zaliczenia przedmiotu przychodzimy z legitymacją studencką. Każdy egzamin (zaliczenie przedmiotu) składa się z 2 części: pisemnej i ustnej. Z obu części należy otrzymać ocenę pozytywną, to jest ok. 55%-60% z części pisemnej i ok. 70% z części ustnej. W części pisemnej rozwiązujemy zadania. **Należy przynieść ze sobą 4-5 arkuszy papieru w kratkę, formatu A3.** Prace na kartkach innego formatu nie będą odbierane. Można przynieść prosty kalkulator, linijkę. Nie wolno używać telefonów, również jako kalkulatora, ani innych urządzeń. W części ustnej odpowiadamy na pytania z teorii. Po wejściu na salę otrzymujemy pytania. Odpowiedzi przygotowujemy na kartce papieru, z którą podchodzimy do odpowiedzi. Sprawdzana jest znajomość i rozumienie definicji, twierdzeń, sposobu ich formułowania, notacji matematycznej. Przygotowując się do części pisemnej należy równocześnie uczyć się teorii! **TO JEST JEDEN EGZAMIN!** Proszę zwrócić uwagę na poprawność wypowiedzianych twierdzeń, definicji itd., również pod kątem zgodności z regułami języka polskiego. Nie należy próbować formułować twierdzeń, definicji itd. własnymi słowami. Pytania i zagadnienia obejmują zakres wymaganej wiedzy teoretycznej oraz opis wymaganych umiejętności praktycznych.

Wykład i ćwiczenia opierają się na wiadomościach i umiejętnościach które powinny zostać nabyte w szkole ponadgimnazjalnej. Niektóre z poniższych punktów przypominają o tym.

**UWAGA!** Ze względów redakcyjnych kolejność pytań różni się od kolejności materiału na wykładzie i ćwiczeniach. Szczegółowej uwadze polecam zagadnienia oznaczone symbolami ♠ oraz ♠♠.

### Elementy algebry i geometrii

1. Aksjomaty liczb rzeczywistych. Ciało liczb rzeczywistych. Zbiór liczb zespolonych jako zbiór par liczb rzeczywistych z określonymi w nim działaniami spełniającymi pewne aksjomaty. Ciało liczb zespolonych.
2. ♠ Postać kartezjańska liczby zespolonej. Moduł. Sprzężenie. Ich własności. Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych. Argument i postać trygonometryczna liczby zespolonej. Własności argumentu. Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej. Wykonywanie działań arytmetycznych na liczbach zespolonych.
3. Obliczanie pierwiastków stopnia 2.
4. Potęgowanie liczb zespolonych - wzór Moivre'a. Definicja pierwiastka stopnia  $n$  liczby zespolonej i jego obliczanie. Równanie  $(z - b)^n + a = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ .

5. ♠ Rozwiązywanie prostych równań stopnia 2 lub 3 o współczynnikach zespolonych lub o współczynnikach rzeczywistych i ujemnym wyróżniku ( $\Delta < 0$ ).
6. Pierwiastki z jedności. Czym jest iloczyn takich pierwiastków? Jaką tworzą strukturę?
7. Definicja równania stopnia  $n$ . Rozwiązywalność równań stopnia  $n$  - istnienie rozwiązań dokładnych w zależności o stopnia równania.
8. ♠ Definicja wielomianu stopnia  $n$ . Twierdzeni Bézout. Zasadnicze twierdzenie algebry. Postać iloczynowa wielomianu. Twierdzenie o rozkładzie na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.
9. Definicja macierzy. Wybrane rodzaje macierzy. Działania na macierzach.
10. Permutacja, transpozycja, znak permutacji. Definicja wyznacznika macierzy. Rozwinięcie Laplace'a.
11. Własności wyznaczników.
12. ♠ Definicja macierzy odwrotnej. Tw. Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy. Wnioski. Warunek istnienia macierzy odwrotnej.
13. Rozwiązywanie równań macierzowych.
14. ♠♠ Układy  $n$  równań liniowych o  $n$  niewiadomych. Istnienie i liczba rozwiązań takiego układu.
15. ♠♠ Rozwiązywanie układów równań liniowych z parametrem.
16. ♠ Metoda eliminacji Gaussa.
17. Wektor zaczepiony i wektor swobodny w  $R^n$ . Dodawanie wektorów i mnożenie przez liczbę.
18. ♠ Definicja iloczynu skalarnego wektorów i jego własności.
19. ♠ Długość wektora. Kąt pomiędzy wektorami. Warunek prostopadłości dwóch wektorów.
20. ♠ Definicja iloczynu wektorowego wektorów i jego własności. Interpretacja geometryczna.
21. ♠ Warunek równoległości dwóch wektorów.
22. Definicja iloczynu mieszanego wektorów i jego własności. Interpretacja geometryczna.
23. ♠♠ Wielomian charakterystyczny macierzy. Wektory własne i wartości własne macierzy.

24. ♠ Różne równania prostej na płaszczyźnie, w szczególności przez dwa punkty. Wyprowadzenia.
25. ♠ Równania prostej w przestrzeni  $R^3$ . Jak powstają?
26. ♠ Równanie płaszczyzny w  $R^3$ . Jak powstaje?

### Rachunek różniczkowy

1. ♠ Odległość na prostej, na płaszczyźnie i w przestrzeni trójwymiarowej. Otoczenie punktu.
2. ♠♠ Definicja funkcji. Funkcje: monotoniczna, monotoniczna przedziałami, różnowartościowa, wzajemnie jednoznaczna, odwrotna do danej, ograniczona, okresowa.
3. ♠♠ Definicja ciągu. Definicja granicy ciągu. "Prawie wszystkie wyrazy ciągu".
4. ♠♠ Definicja granic niewłaściwych ciągów:  $+\infty$  oraz  $-\infty$ . Ciąg rozbieżny.
5. Twierdzenia o ciągach (tw. o trzech ciągach itd.). Dowody.
6. ♠ Wzór dwumianowy Newtona. Symbole Newtona. Liczba  $e$ . Ciąg  $(1 + \frac{1}{n})^n$ .
7. Granice innych wybranych ciągów.
8. ♠♠ Ciąg geometryczny. Suma ciągu geometrycznego
9. ♠♠ Definicja granicy funkcji jednej zmiennej o wartościach w  $R$ . Granice niewłaściwe.
10. Granice jednostronne.
11. Potęgowanie i funkcja wykładnicza. Rozwiązywanie prostych równań wykładniczych.
12. ♠ Definicja logarytmu i jego własności. Funkcja logarytmiczna. Rozwiązywanie prostych równań logarytmicznych.
13. ♠♠ Definicje, własności i wykresy funkcji elementarnych : wartość bezwzględna, wielomiany, f. homograficzna, f. wymierne, f. trygonometryczne, f. cyklometryczne, f. wykładnicze, f. logarytmiczne.
14. ♠♠ Wartości funkcji elementarnych w punktach charakterystycznych dla danej funkcji, zachowanie się funkcji elementarnych na krańcach przedziału określoności.
15. ♠ Rozwiązywanie prostych równań i nierówności: z wartością bezwzględną, wymiernych, np.  $|x - a| > b$ ,  $\frac{x-a}{x-b} = x$ , itp.

16. ♠ Związki nierówności:  $f(x) > 0$ ,  $f(x) < 0$  z położeniem wykresu funkcji.
17. ♠ Wzory trygonometryczne:  $\cos(\alpha \pm \beta)$ ,  $\sin(\alpha \pm \beta)$ , jedynkowy, podwójnego kąta.
18. ♠ Ciągłość funkcji. Własności funkcji ciągłych.
19. Wybrane granice specjalne funkcji.
20. ♠♠ Def. pochodnej funkcji. Interpretacja geometryczna. Pochodne jednostronne. Obliczanie na podstawie definicji pochodnych prostych funkcji, n.p.  $x^3$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $\frac{1}{x}$  itp.
21. ♠♠ Styczna i normalna do wykresu funkcji.
22. Własności pochodnej. ♠ Pochodne funkcji elementarnych.
23. ♠ Ciągłość funkcji różniczkowalnej. Dowód. Przykład funkcji ciągłej, nieróżniczkowalnej.
24. ♠ Różniczka funkcji i interpretacja geometryczna. Zastosowanie.
25. ♠ Tw. Rolla - Lagrange'a. Wnioski. Dowody.
26. Reguła de l'Hospitala.
27. ♠ Wyznaczanie dziedzin funkcji złożonych (inaczej: rozwiązywanie równań i nierówności różnych typów!).
28. ♠ Definicje minimum i maksimum lokalnego funkcji jednej zmiennej. Warunki: konieczny i pierwszy dostateczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej. Przedziały monotoniczności.
29. Definicja pochodnej rzędu  $n$ . Pochodne rzędu  $n$  wybranych funkcji.
30. ♠♠ Wzory: Taylora i Maclaurina. Reszta Lagrange'a.
31. ♠ Wzory Maclaurina dla wybranych funkcji.
32. ♠ Drugi warunek dostateczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej. Przedziały wypukłości i punkty przegięcia.
33. ♠ Asymptoty wykresu funkcji.
34. ♠♠ Badanie przebiegu zmienności funkcji. Krysicki, Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, dwa rozdziały: 10 i 13? oraz funkcje takie, jak  $\arctg(x^2 - 2x)$ ,  $\arctg(x - \sqrt{x})$ ,  $\arcsin(\cos x - \frac{1}{2})$ ,  $\arcsin(1 - \sqrt{x})$ .
35. ♠ Elipsa, hiperbola. Jak powstają? Równania kanoniczne elipsy i hiperboli.

**Rachunek całkowy** (tylko punkty zrealizowane na wykładzie).

1. Definicja całki nieoznaczonej. Jej własności. Całki funkcji elementarnych.
2. Całkowanie przez części.
3. Zamiana zmiennych w całce nieoznaczonej.  $\int f(ax + b)dx$ .
4.  $\int \sin ax \cos bxdx$ ,  $\int \cos ax \cos bxdx$ ,  $\int \sin ax \sin bxdx$ .