Rozwiązania zadań egzaminacyjnych z analizy z dn. 13-04-2015

April 16, 2015

1. Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x + \ln(2x-1)$, równoległej do prostej $3x - y + 20 = 0$.

Rozwiązanie. Szukana styczna ma współczynnik kierunkowy taki sam jak prosta. Zatem:

$$\begin{aligned} [x + \ln(2x-1)]' &= 3, \\ 1 + \frac{2}{2x-1} &= 3, \\ \frac{2x+1}{2x-1} &= 3, \\ x &= 1, \end{aligned}$$

tzn. $f'(1) = 3$, $f(1) = 1$, a równanie styczne jest postaci $y - 1 = 3(x-1)$ czyli $y = 3x - 2$.

2. Napisz wzór Maclaurina dla funkcji $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $n = 3$.

Rozwiązanie. Ponieważ $n = 3$, reszta będzie zależała od pochodnej rzędu czwartego. Funkcję wygodnie jest zapisać w postaci $f(x) = (2x+1)^{\frac{1}{2}}$. Obliczamy kolejne pochodne (pamiętajmy o pochodnej funkcji wewnętrznej) i ich wartości w punkcie $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x+1)^{\frac{1}{2}}, \qquad f(0) = 1, \\ f'(x) &= (2x+1)^{-\frac{1}{2}}, \qquad f'(0) = 1, \\ f''(x) &= -(2x+1)^{-\frac{3}{2}}, \qquad f''(0) = -1, \\ f'''(x) &= 3(2x+1)^{-\frac{5}{2}}, \qquad f'''(0) = 3, \\ f^{(4)}(x) &= -15(2x+1)^{-\frac{7}{2}}, \qquad f^{(4)}(\Theta x) = -15(2\Theta + 1)^{-\frac{7}{2}}. \end{aligned}$$

Podstawiając do wzoru Maclaurina i dokonując kilku uproszczeń, otrzymujemy:

$$\sqrt{2x+1} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{8}(2\Theta x + 1)^{-\frac{7}{2}}x^4.$$

- W kolejnych zadaniach należało wykonać badanie funkcji z użyciem pierwszej (zad. 3 i 4) oraz drugiej pochodnej (zad. 5 i 6). Wydaje się, że nikt nie zauważył, iż w zadaniach 3 i 5 oraz 4 i 6 występują te same funkcje.

- Większość nie wykańcza rachunków. Obliczacie Państwo pochodną i, zamiast uprościć otrzymane wyrażenie, wykonujecie kolejne rachunki, np. obliczacie pochodną rzędu drugiego.

3. $f(x) = 1 + \ln^2 x$; dziedzina $D_f = (0, \infty)$. Obliczamy pochodną rzędu pierwszego i znajdujemy jej miejsce zerowe.

$$f'(x) = 0 + 2\ln x(\ln x)' = 2\ln x\frac{1}{x} = 2\frac{\ln x}{x}, \quad x > 0.$$

$$f'(x) = 0 <=> \ln x = 0 <=> x = 1.$$

Obliczamy pochodną rzędu drugiego i znajdujemy jej miejsce zerowe.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = 2\frac{1-\ln x}{x^2}, \quad x > 0. \\ f''(x) &= 0 <=> 1 - \ln x = 0 <=> \ln x = 1 <=> x = e^1 = e. \end{aligned}$$

Sporządzamy tabelęktóra powinna wyglądać tak:

x	$(0,1)$	1	$(1,e)$	e	(e,∞)
$f'(x)$		0			
$f''(x)$				0	
$f(x)$					

,

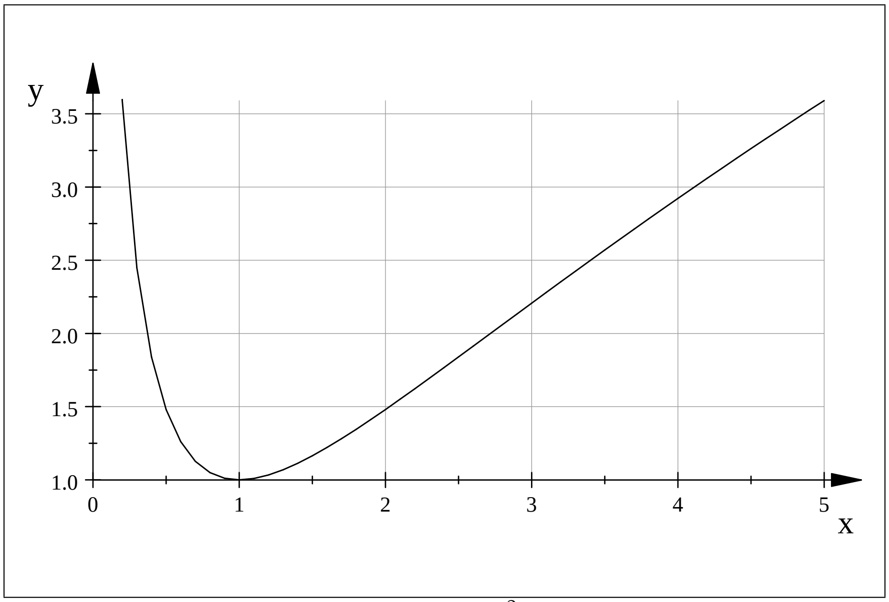
a po uzupełnieniu i wyciągnięciu wniosków tak:

x	$(0,1)$	1	$(1,e)$	e	(e,∞)
$f'(x)$	-	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	-
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$
monotoniczność	maleje	min.	rośnie		rośnie
wypukła		w dół		p.p.	do góry

.

p.p. - punkt przegięcia wykresu.

A tak wgląda wykres badanej funkcji:



$f(x) = 1 + \ln^2 x$

Na podstawie wykresu nie można stwierdzić istnienia punktu przegięcia w $x = e$.

4. $f(x) = (x-5)\sqrt{2x+5}$. Z tajemniczych dla mnie powodów część Państwa uznała, że funkcja nie jest określona dla $x = 5$! Czy ktoś może to wyjaśnić? Wyrażenie pod pierwiastkiem musi być nieujemne, zatem $2x+5 \geq 0$, skąd $D_f =< -\frac{5}{2}, \infty)$.

Obliczamy pochodną rzędu pierwszego, upraszczamy otrzymane wyrażenie i dopiero wtedy znajdujemy miejsce zerowe. Tak jest wygodniej i bezpieczniej!

$$f'(x) = \sqrt{2x+5} + (x-5)\frac{1}{2\sqrt{2x+5}}(2x+5)' =$$

$$\sqrt{2x+5} + \frac{x-5}{\sqrt{2x+5}} = \frac{\left(\sqrt{2x+5}\right)^2 + x - 5}{\sqrt{2x+5}} = \frac{3x}{\sqrt{2x+5}}.$$

$$f'(x) = 0 <=> x = 0.$$

$D_{f'} = (-\frac{5}{2}, \infty) \neq D_f$.

Obliczamy pochodną rzędu drugiego, upraszczamy otrzymane wyrażenie i dopiero wtedy znajdujemy miejsce zerowe.

$$f''(x) = \left(\frac{3x}{\sqrt{2x+5}}\right)' = \frac{3\sqrt{2x+5} - 3x\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x+5}}}{\left(\sqrt{2x+5}\right)^2} = \frac{\frac{3(2x+5)-3x}{\sqrt{2x+5}}}{2x+5} = \frac{3x+15}{\left(\sqrt{2x+5}\right)^2}.$$

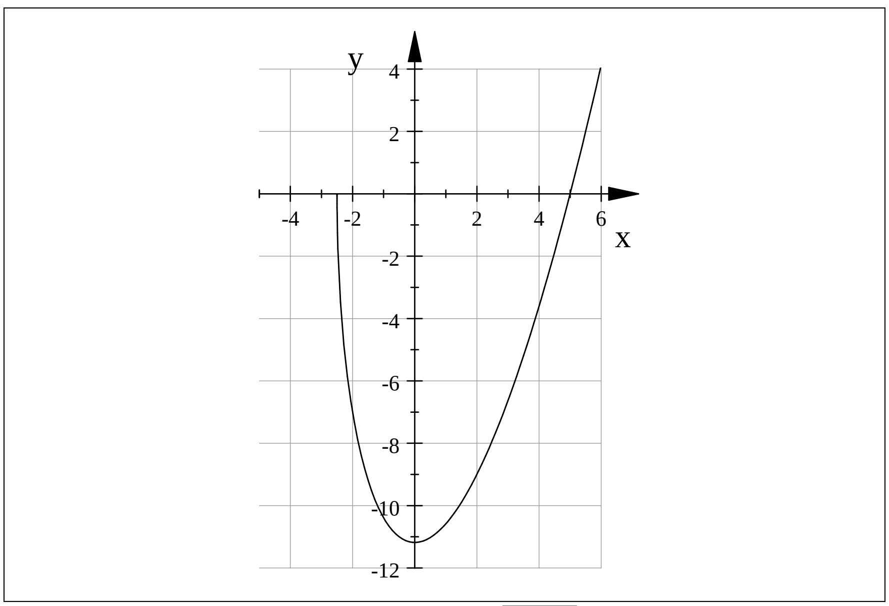
$$f''(x) = 0 <=> x = -5,$$

ale -5 nie należy do dziedziny funkcji, czyli przypuszczenie, że istnieją miejsca zerowe drugiej pochodnej okazuje się fałszywe. Zatem f'' jest stałego znaku w (-$\frac{5}{2}, \infty$) i nie posiada punktów przegięcia. Sporządzamy tabelę:

x	$(-\frac{5}{2}, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f'(x)$	-	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-5\sqrt{5}$	$\nearrow$
monotoniczność	maleje	min.	rośnie
wypukła	w dół		

.

Wykres:



$f(x) = (x-5)\sqrt{2x+5}$

5.

$$\int \cos 2x \cos x dx = \int \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) \cos x dx =$$

$$\int \left(1 - \sin^2 - \sin^2 x\right) \cos x dx = \int \left(1 - 2\sin^2 x\right) \cos x dx = \begin{vmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{vmatrix} =$$

$$\int \left(1 - t^2\right) dt = t - \frac{2}{3}t^3 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + C$$

6.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+1}dx = \begin{vmatrix} t=\sqrt{x} & x=t^2 \\ & dx=2tdt \end{vmatrix} = \int \frac{1}{t+1}2tdt =$$
$$2\int \frac{t}{t+1}dt = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}dt = 2\int (1-\frac{1}{t+1})dt =$$
$$2(t-\ln(t+1))+C = 2(\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1))+C.$$