Rozkład PLU macierzy

Stanisław Ewert-Krzemieniewski

December 10, 2018

1. Rozkład PLU macierzy jest rozkładem dowolnej macierzy $A = A_{m\times n}$ na iloczyn macierzy permutacji $P = P_{m\times m}$, macierzy dolnotrójkątnej $L = L_{m\times m}$ i górnotrójkątnej $U = U_{m\times n}$ (po angielsku: lower triangular and upper triangular, stąd nazwa PLU). Macierze P oraz L są odwracalne. Na przykład:

   (a)
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{bmatrix},$$

   (b)
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

   (c)
$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -4 & -8\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

   Macierz jednostkowa w przykładach **a.** oraz **b.** reprezentuje permutację identycznościową.

2. Niech $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ a & a & a\\ b & b & a\end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $E_{31} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -b & 0 & 1\end{bmatrix}$.

3. $E_{21}A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -a & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ a & a & a\\ b & b & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & a & 0\\ b & b & a\end{bmatrix}$.

4. $E_{31}E_{21}A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -b & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & a & 0\\ b & b & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & b & a-b\end{bmatrix}$.

   Jak widać, indeks jk macierzy E_{jk} wskazuje który wyraz macierzy jest eliminowany.

5. Niech $E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{a}0 & 1 \end{bmatrix}$. Wtedy

$$E_{32}(E_{31}E_{21}A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix} = U.$$

Macierz którą otrzymaliśmy jest szukaną macierzą górnotrójkątną.

Zauważmy, że należy przyjąć założenie $a \neq 0$.

6. Macierze E_{32}, E_{31}, E_{21} są macierzami dolnotrójkątnymi, o wyznacznikach równych 1. Iloczyn macierzy dolnotrójkątnych jest zawsze macierzą dolnotrójkątna. Podobnie, iloczyn macierzy o wyznaczniku równym 1 jest macierzą o wyznaczniku równym 1. (Dlaczego?) Macierze odwrotne posiadają te same własności. (Dlaczego?) Zatem z równania $E_{32}E_{31}E_{21}A = U$ otrzymujemy

$A = (E_{32}E_{31}E_{21})^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix}$, gdzie $E_{32}E_{31}E_{21}$ jest macierzą dolnotrójkątna, o wyznaczniku 1 oraz

$$E_{32}E_{31}E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{a}0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli oznaczymy otrzymaną macierz przez L^{-1}, to

$L = (E_{32}E_{31}E_{21})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jest szukaną macierzą dolnotrójkątną.

7. Ostatecznie, jeżeli $a \neq 0$, to $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & a & a \\ b & b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{bmatrix} = LU$.

8. Rozważmy równanie macierzowe $AX = B$, gdzie $A = LU$, L jest macierzą dolnotrójkątną, U jest macierzą górnotrójkątna, $X = [x_r]_{n\times 1}$ to jednokolumnowa macierz niewiadomych, a $B = [b_r]_{n\times 1}$ zadana macierz, $r = 1, ..., n$. Wówczas mamy kolejno

$$\begin{aligned} AX &= B, \\ LUX &= B, \\ UX &= L^{-1}B. \end{aligned}$$

Jeżeli A jest postaci jak wyżej, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ to, korzystając z wykonanych obliczeń, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = E_{32}E_{31}E_{21}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -a & 1 & 0\\ -b & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2-ab_1\\ b_3-bb_1\end{bmatrix},$$

przy założeniu $a \neq 0$. Otrzymane równanie macierzowe jest równoważne układowi

$$\begin{bmatrix}x & & +z\\ & ay & \\ & & (a-b)z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2-ab_1\\ b_3-bb_1\end{bmatrix}.$$

9. Rozważmy przypadek $a = 0$. Wtedy $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ b & b & 0\end{bmatrix}$, Oznaczmy przez P_{23} macierz permutacji, otrzymaną z macierzy jednostkowej przez zamianę miejscami drugiego i trzeciego wiersza: $P_{23} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Wtedy
$P_{23}A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ b & b & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ b & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$,
$E_{21}P_{23}A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -b & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ b & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & b & -b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = U$. Zauważmy, że
$P_{23}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = P_{23}$ oraz

$$A = (E_{21}P_{23})^{-1}U = P_{23}^{-1}E_{21}^{-1}U = P_{23}E_{21}^{-1}U =$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ b & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & b & -b\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = P_{23}LU.$$