Rozwiązanie zadań z dn. 10.04.2014

1) Napisz równanie stycznej do krzywej $y=(x+1)\sqrt{x^2+1}$ w punkcie $x_0=0$.

R. stycznej: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Należy obliczyć wartość funkcji w punkcie x_0 oraz wartość pochodnej w x_0:

$y(0)=f(0)=(0+1)\sqrt{0^2+1}=1$

$y'=\sqrt{x^2+1}+(x+1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}$

$y'(0)=f'(0)=1$. Po podstawieniu: $y-1=1(x-0)$.

Ostatecznie: $y=x+1$

2) Napisz 4 pierwsze wyrazy wzoru Taylora dla $f(x)=xe^x$ w otoczeniu punktu $x_0=0$.

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{r=1}^{n}\frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Należy obliczyć wartości funkcji i jej pochodnych w punkcie x_0. Mamy

$f(x)=xe^x$ $\qquad f(0)=0$

$f'(x)=(x+1)e^x$ $\qquad f'(0)=1$

$f''(x)=(x+2)e^x$ $\qquad f''(0)=2$

$f'''(x)=(x+3)e^x$ $\qquad f'''(0)=3$

$f^{IV}(x)=(x+4)e^x$ $\qquad f^{IV}(0)=4$

$f^{V}(x)=(x+5)e^x$

$$xe^x=0+\frac{1}{1}x+\frac{2}{2}x^2+\frac{3}{3!}x^3+\frac{4}{4!}x^4+\frac{(\Theta x+5)e^{\Theta x}}{5!}x^5=$$

$$=x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{(\Theta x+5)e^{\Theta x}}{5!}x^5.$$

Przebieg $y = \frac{e^{-x}}{x}$ | $D_f = R - \{0\}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0$ $\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{-e^{-x}}{1} = -\infty$

Asymptota pozioma $y = 0$ dla kierunku $+\infty$

Łatwo sprawdzić, że dla $x \to -\infty$ nie ma również asymptoty ukośnej różnej od poziomej.

$\lim_{x \to 0_-} \frac{e^{-x}}{x} = \left[\frac{1}{0_-}\right] = -\infty$, $\lim_{x \to 0_+} \frac{e^{-x}}{x} = \left[\frac{1}{0_+}\right] = +\infty$

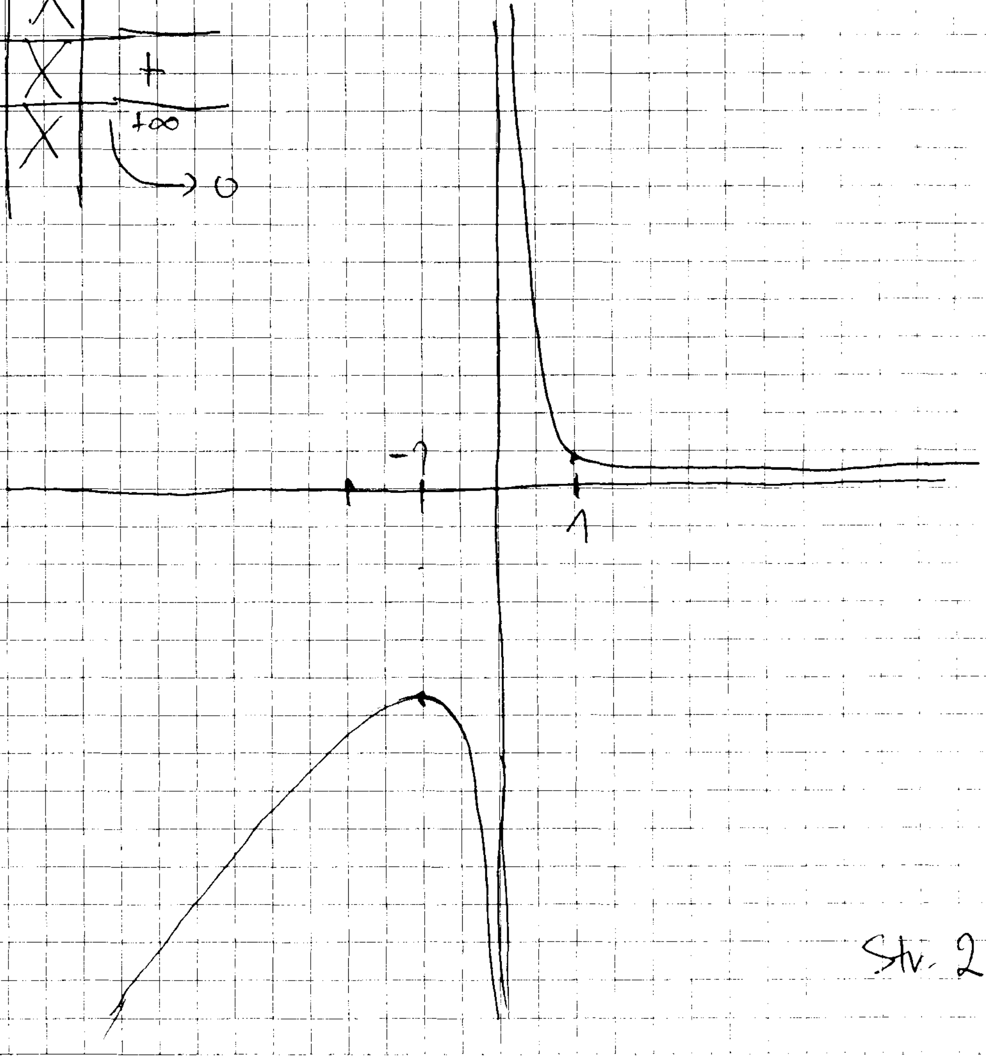
Asymptota pionowa obustronna $x = 0$

$y' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}$; $y' = 0 \iff x = -1$, $x \neq 0$

$y'' = \frac{(x^2+2x+2)e^{-x}}{x^3}$ trójmian $x^2+2x+2 > 0$ bo $\Delta < 0$.

brak miejsc zerowych - brak p.p.

x	$(-\infty,-1)$	-1		0	$(0,\infty)$
y'	$+$	0	$-$	X	$-$
y''	$-$	$-$	$-$	X	$+$
y	$-\infty \nearrow$	max $-e$	$\searrow -\infty$	X	$+\infty \searrow 0$



Przykład $y=(x+1)\ln(x+1)$ $\quad x+1>0 \Rightarrow x>-1 \Leftrightarrow x\in(-1,\infty)$

Zatem do obliczenia są TYLKO

$$\lim_{x\to -1_+}(x+1)\ln(x+1) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to -1_+}\frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to -1_+}\frac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to -1}-(x+1)$$

$$\lim_{x\to -1_+}(x+1)\ln(x+1) = 0 \,!$$

$$\lim_{x\to\infty}(x+1)\ln(x+1) = [\infty\cdot\infty] = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)+1}{1} = +\infty$$

Brak asymptot pionowych (bo granica w -1 jest skończona) i ukośnych (i tym poziomych)

$y' = \ln(x+1)+1$, $\quad y'=0 \Leftrightarrow \ln(x+1)=-1 \Leftrightarrow$

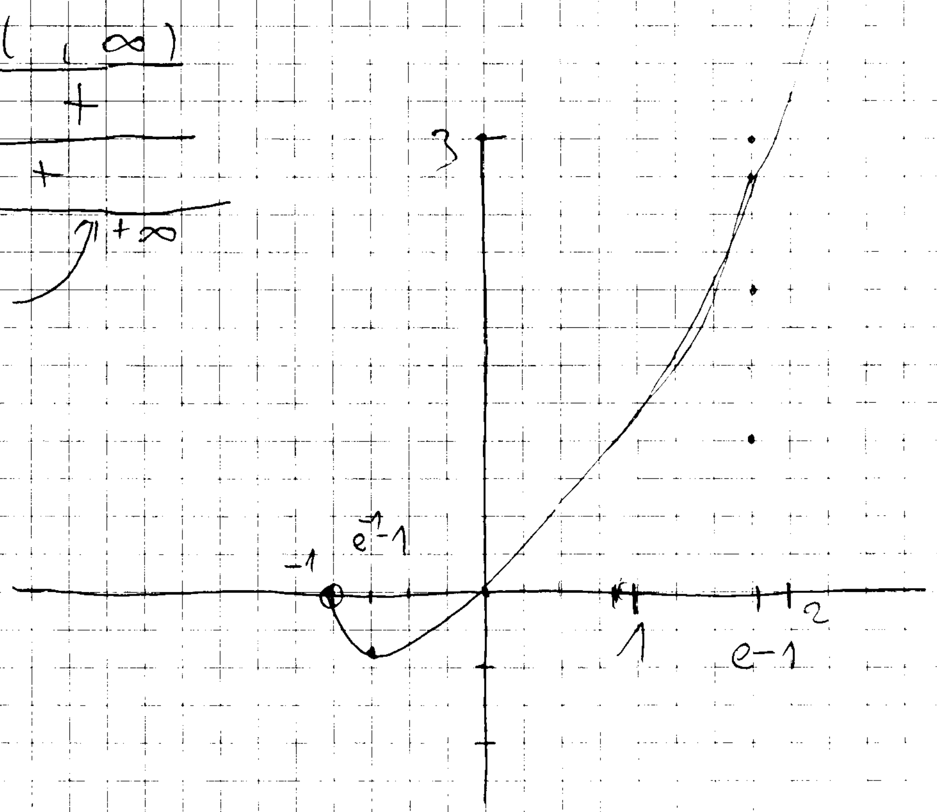
$D_{y'} = (-1,\infty)$ $\qquad e^{\ln(x+1)} = e^{-1}$

$x = e^{-1}-1 \quad (<0!)$

$y'' = \frac{1}{x+1}$, $\quad x\in(-1,\infty)$, brak miejsc zerowych

x	-1	$(-1,\ \ )$	$e^{-1}-1$	$(\ \ ,\infty)$
y'		$-$	0	$+$
y''		$+$	$+$	$+$
y		$0 \searrow$	min $-\frac{1}{e}$	$\nearrow +\infty$

$y(0)=0$



Przebieg $y=\frac{x^2}{(x-1)^2}$ $x\neq 1$ Funkcja o wartościach nieujemnych!

Iloraz 2 wielomianów tego samego stopnia.

Liczymy: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2(1-\frac{1}{x})^2} = 1$

Ten sam rachunek dla $x\to-\infty$. Asymptota $y=1$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$. Nie trzeba liczyć oddzielnie granic $x\to 1_-$, $x\to 1_+$.

Asymptota pionowa $x=1$.

$$y' = \frac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)\cdot x^2}{(x-1)^4} = \frac{2x(x-1)-2x^2}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3}, \quad x\neq +1$$

$y'=0 \iff x=0$

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 2x\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(x-1)^2\left[-(x-1)+3x\right]}{(x-1)^6} = \frac{4x+2}{(x-1)^4}, \quad x\neq +1$$

UPRASZCZAMY UŁAMKI!

$y''=0 \iff x=-\frac{1}{2}$

x		$-\frac{1}{2}$		0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	X	$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	X	$+$
y	$\frac{1}{9}$	PP		min 0	$+\infty$	X	$+\infty$
1							1