

# Pytania i zagadnienia do egzaminów i zaliczeń z matematyki

## MiBM, S1, II semestr 2015/16

Część pisemna egzaminu obejmuje zadania z całego materiału.

Aby przystąpić do części ustnej należy uzyskać zaliczenie ćwiczeń oraz pozytywną ocenę z części pisemnej. W części ustnej odpowiadamy z teorii - sprawdzane jest rozumienie pojęć i znajomość twierdzeń. Należy przynieść: .

**legitymację studencką, papier do pisania, pióro lub długopis.**

Po otrzymaniu pytań mamy czas na przygotowanie się do odpowiedzi. Proszę zwrócić uwagę na poprawność logiczną i gramatyczną przygotowywanych odpowiedzi. Symbol  $\otimes$  oznacza zagadnienia o szczególnym znaczeniu.

Wymagana jest znajomość rachunku różniczkowego w zakresie semestru pierwszego, w szczególności funkcji i umiejętność różniczkowania.

**UWAGA!** Ze względów redakcyjnych kolejność pytań różni się od kolejności materiału na wykładzie i ćwiczeniach. Szczegółnej uwadze polecam zagadnienia oznaczone symbolami  $\spadesuit$  oraz  $\spadesuit\spadesuit$ .

### Elementy algebry i geometrii

1. Aksjomaty liczb rzeczywistych. Ciało liczb rzeczywistych. Zbiór liczb zespolonych jako zbiór par liczb rzeczywistych z określonymi w nim działaniami spełniającymi pewne aksjomaty. Ciało liczb zespolonych.
2.  $\spadesuit$  Postać kartezjańska liczby zespolonej. Moduł. Sprzężenie. Ich własności. Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych. Argument i postać trygonometryczna liczby zespolonej. Własności argumentu. Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej. Wykonywanie działań arytmetycznych na liczbach zespolonych.
3. Obliczanie pierwiastków stopnia 2.
4. Potęgowanie liczb zespolonych - wzór Moivre'a. Definicja pierwiastka stopnia  $n$  liczby zespolonej i jego obliczanie. Równanie  $(z - b)^n + a = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{C}$ .
5.  $\spadesuit$  Rozwiązywanie prostych równań stopnia 2 lub 3 o współczynnikach zespolonych lub o współczynnikach rzeczywistych i ujemnym wyróżniku ( $\Delta < 0$ ).
6. Definicja równania stopnia  $n$ . Rozwiązywalność równań stopnia  $n$  - istnienie rozwiązań dokładnych w zależności o stopnia równania.
7.  $\spadesuit$  Definicja wielomianu stopnia  $n$ . Twierdzeni Bézout. Zasadnicze twierdzenie algebry. Postać iloczynowa wielomianu. Twierdzenie o rozkładzie na iloczyn wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.

8. Definicja macierzy. Wybrane rodzaje macierzy. Działania na macierzach.
9. Permutacja, transpozycja, znak permutacji. Definicja wyznacznika macierzy. Rozwinięcie Laplace'a.
10. Własności wyznaczników.
11. ♠ Definicja macierzy odwrotnej. Tw. Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu macierzy. Wnioski. Warunek istnienia macierzy odwrotnej.
12. Rozwiązywanie równań macierzowych.
13. ♠♠ Układy  $n$  równań liniowych o  $n$  niewiadomych. Istnienie i liczba rozwiązań takiego układu.
14. ♠♠ Rozwiązywanie układów równań liniowych z parametrem.
15. ♠ Metoda eliminacji Gaussa.
16. Wektor zaczepiony i wektor swobodny w  $R^n$ . Dodawanie wektorów i mnożenie przez liczbę.
17. ♠ Definicja iloczynu skalarnego wektorów i jego własności.
18. ♠ Długość wektora. Kąt pomiędzy wektorami. Warunek prostokątności dwóch wektorów.
19. ♠ Definicja iloczynu wektorowego wektorów i jego własności. Interpretacja geometryczna.
20. ♠ Warunek równoległości dwóch wektorów.
21. Definicja iloczynu mieszanego wektorów i jego własności. Interpretacja geometryczna.
22. ♠♠ Wielomian charakterystyczny macierzy. Wektory własne i wartości własne macierzy.
23. ♠ Różne równania prostej na płaszczyźnie, w szczególności przez dwa punkty. Wyprowadzenia.
24. ♠ Równania prostej w przestrzeni  $R^3$ . Jak powstają?
25. ♠ Równanie płaszczyzny w  $R^3$ . Jak powstaje?

### **Rachunek całkowy**

1. ♠ Definicje, własności i wykresy funkcji elementarnych. Własności logarytmu. (Semestr I).
2. ♠ Różniczka funkcji.
3. Definicja całki nieoznaczonej. Jej własności. Całki funkcji elementarnych.

4. Całkowanie przez części.
5. Zamiana zmiennych w całce nieoznaczonej.  $\int f(ax + b)dx$ .
6. ♠ Wzory trygonometryczne:  $\cos(\alpha \pm \beta)$ ,  $\sin(\alpha \pm \beta)$ , jedynkowy, podwójnego kąta.
7. Zastosowanie powyższych wzorów do obliczania całek:  $\int \sin ax \cos bxdx$ ,  $\int \cos ax \cos bxdx$ ,  $\int \sin ax \sin bxdx$ .
8. ♠ Ułamki proste Rozkład funkcji wymiernych na sumę ułamków prostych i wielomianu. Całkowanie.
9. Całki postaci  $\int x^a \ln^b x dx$ .
10. ♠♠ Definicja całki oznaczonej. Interpretacja geometryczna. Własności. **(Każdy musi odpowiedzieć na to pytanie.)**

$$\text{Wzór } \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ NIE JEST DEFINICJA!!}$$

11. Obliczanie całek oznaczonych: twierdzenie Newtona, całkowanie przez części, zamiana zmiennych w całce oznaczonej.
12. ♠ Zastosowania geometryczne całki oznaczonej: pole obszaru płaskiego. Proste przykłady.
13. ♠ Całka niewłaściwa: całka z funkcji w przedziale nieograniczonym. Przykłady.

### Równania różniczkowe

1. ♠ Definicja oryginału i przekształcenia Laplace'a.
2. Własności przekształcenia Laplace'a (liniowość).
3. Zagadnienie Cauchy'ego dla r. r. rzędu drugiego.
4. Zastosowanie przekształcenia Laplace'a do r. r. liniowych. Jednoznaczność rozwiązania zagadnienia Cauchy.
5. ♠♠ Definicja równania różniczkowego rzędu n i rzędu pierwszego. Postać normalna.
6. Zagadnienie Cauchy'ego dla r. r. rzędu pierwszego. Twierdzenie o jednoznaczności rozwiązania.
7. Rozwiązywanie wybranych typów r. r.:  $F(x, y') = 0$ ,  $F(y, y') = 0$ , o zmiennych rozdzielonych, jednorodne,  $y' = f(aa + by + c)$ , liniowe rzędu pierwszego - metoda uzmienniania stałej.

### **Funkcje wielu zmiennych**

1. ♠ Odległość na prostej, na płaszczyźnie i w przestrzeni trójwymiarowej. Otoczenie punktu  $x$ .
2. )♠ Definicje pochodnych cząstkowych.
3. ♠ Pochodna cząstkowa funkcji złożonej i jej obliczenie.
4. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Lemat Schwarz'a.
5. Funkcja uwikłana: warunek istnienia i obliczanie jej pochodnej.
6. ♠ Styczna i normalna do krzywej danej równaniem uwikłanym.
7. Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych: definicja ekstremum lokalnego, warunek konieczny i warunek dostateczny istnienia.

### **Szeregi**

- ♠♠ Nieskończony ciąg geometryczny i jego suma. (I semestr)