

A. Oblicz następujące całki postaci $\int x^a \ln^b x dx$, gdzie a, b są pewnymi liczbami całkowitymi. Zwróć uwagę na różnice w sposobach całkowania w zależności od wartości przyjmowanych przez parametry a oraz b .

1. $\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$
2. $\int x \ln^2 x dx = \frac{1}{4}x^2 (2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + C.$
3. $\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$
4. $\int x^2 \ln^2 x dx = \frac{1}{27}x^3 (9 \ln^2 x - 6 \ln x + 2) + C.$
5. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$
6. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \frac{1}{4} \ln^4 x + C.$
7. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} (\ln x + 1) + C.$
8. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6) + C.$
9. $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln (\ln x) + C.$
10. $\int \frac{1}{x \ln^4 x} dx = -\frac{1}{3 \ln^3 x} + C.$

B. Dla jakich wartości parametru k całki

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^k \ln x} dx, \quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln^k x} dx$$

są zbieżne? Co można powiedzieć o zbieżności szeregów

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^k \ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^k n}?$$

Odpowiedzi: 1. zbieżna dla $k > 1$, rozbieżna dla $k \leq 1$. 2. zbieżna dla $k > 1$, rozbieżna dla $k \leq 1$. Wartość całki dla $k > 1$ wynosi $\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$.

C. Oblicz podane niżej całki korzystając z następujących wzorów:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Pierwsza całka nosi nazwę całki Poissona, druga całki Dirichleta.

1. $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx, a > 0.$
2. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$ Wskazówka: zamiana zmiennych.
3. $\int_0^{\infty} \frac{\sin 3x}{x} dx; \int_0^{\infty} \frac{\sin(-4x)}{x} dx; \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx, a > 0;$
 $\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} dx, b < 0.$
4. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx, a > 0, b > 0.$ Wskazówka: rozważ przypadki: $a > b, a = b, a < b.$
5. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$ Wskazówka: całkowanie przez części.

Odpowiedzi: 1. $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$ 2. $\sqrt{\pi}.$ 3. $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}.$ 4. $\frac{\pi}{2}$ gdy $a > b, \frac{\pi}{4}$ gdy $a = b, 0$ gdy $a < b.$

D. Wykaż równości:

1. $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$ Wskazówka: dokonaj zamiany zmiennych w pierwszej całce.
2. $\int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = 0.$ Wskazówka: podziel przedział całkowania na dwie części, następnie w jednej z całek podstaw $x = \frac{1}{t}.$